

# Trabajo Fin de Máster

## Máster Universitario en Ingeniería Aeronáutica

### Análisis del movimiento de un dipolo magnético que sobrevuela una superficie metálica conductora

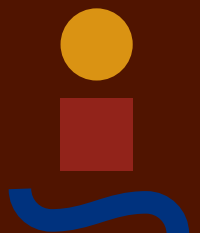
Autor: David Rincón Díaz

Tutores: Antonio de la Cruz González Fernández

Gabriel Cano Gómez

Departamento de Física Aplicada III  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018







Trabajo Fin de Máster  
Máster Universitario en Ingeniería Aeronáutica

# **Análisis del movimiento de un dipolo magnético que sobrevuela una superficie metálica conductora**

Autor:  
David Rincón Díaz

Tutor:  
Antonio de la Cruz González Fernández  
Profesor Titular de Universidad

Cotutor:  
Gabriel Cano Gómez  
Profesor Titular de Universidad

Departamento de Física Aplicada III  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018



Trabajo Fin de Máster:   Análisis del movimiento de un dipolo magnético que sobrevuela una superficie metálica conductora

Autor:           David Rincón Díaz

Tutores:       Antonio de la Cruz González Fernández, Gabriel Cano Gómez

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:



# Resumen

---

En este trabajo se realiza un análisis teórico – mediante simulaciones – del movimiento de un dipolo magnético al ser dejado caer sobre un plano de material superconductor, suponiendo diferentes valores de las magnitudes que caracterizan dicho sistema como pueden ser: la geometría del dipolo, la altura desde la que comienza a caer, la orientación inicial o las velocidades de rotación inicial alrededor de cada uno de los ejes.



# Abstract

---

This paper covers a theoretical analysis – through numerical simulations – of the movement of a magnetic dipole when it is lent to fall on a plane of superconducting material. Different values of the magnitudes that characterize the system are considered, such as: the geometry of the dipole, the height from which it begins to fall, the initial orientation or the initial rotation speeds around each axes.





# Índice

---

Resumen	VII
Abstract	IX
Notación	XIII
<b>1. Introducción</b>	<b>15</b>
1.1. Levitación	15
1.2. Principios del electromagnetismo	16
1.2.1. Magnetización	18
1.2.2. Corrientes parásitas	18
1.3. Superconductividad	19
1.3.1. Efecto Meissner-Ochsenfeld	20
1.3.2. Modelo de los dos fluidos	20
1.3.3. Efecto isotópico	20
1.3.4. Teoría BCS	20
1.3.5. Tipos de superconductores	21
1.4. Levitación por superconductores: Aplicaciones	23
<b>2. Sistema mecánico</b>	<b>25</b>
2.1. Sistema de referencia	25
2.1.1. Ángulos de Euler	26
2.1.2. Ángulos de Tait-Bryan	26
2.1.2.1. Rotación alrededor del eje $x_1$	27
2.1.2.2. Rotación alrededor del eje $y_2$	28
2.1.2.3. Rotación alrededor del eje $z_3$	30
2.2. Definición del sistema	33
2.2.1. Formulación con ángulos de Tait-Bryan	34
2.2.2. Formulación con proyección de bases	36
<b>3. Fuerzas y pares sobre un dipolo</b>	<b>41</b>
3.1. Dipolo magnético sobre un plano superconductor	41
3.2. Método de las imágenes	43
3.3. Fuerzas y pares entre dos dipolos	45
<b>4. Ecuaciones de movimiento</b>	<b>47</b>
4.1. Formulación con ángulos de Tait-Bryan	48
4.1.1. Sistema de ecuaciones	49
4.1.2. Adimensionalización de las ecuaciones	50
4.1.3. Sistema de ecuaciones adimensionales	51
4.2. Formulación con proyección de bases	52
4.2.1. Sistema de ecuaciones	53
4.2.2. Adimensionalización de las ecuaciones	54
4.2.3. Sistema de ecuaciones adimensionales	55
4.3. Constantes de movimiento	56

<b>5. Movimiento sobre un medio superconductor</b>	<b>59</b>
5.1. Dipolo con configuración geométrica de un disco	60
5.1.1. Aumento de la intensidad magnética	61
5.1.2. Aumento de la velocidad de rotación del eje de simetría del dipolo	64
5.1.3. Aumento de la velocidad de rotación inicial de ejes de no simetría del dipolo	67
5.2. Comparación según la geometría del dipolo	70
5.2.1. Dipolo con orientación inicial horizontal	70
5.2.2. Dipolo con orientación inicial vertical	72
5.2.3. Dipolo con orientación inicial oblicua	74
<b>6. Movimiento sobre un medio óhmico</b>	<b>77</b>
6.1. Descripción del sistema	77
6.1.1. Sistema de ecuaciones	80
6.1.2. Adimensionalización de ecuaciones	81
6.1.3. Sistema de ecuaciones adimensionales	82
6.2. Comparación según el valor del parámetro conductivo	83
6.2.1. Parámetro conductivo bajo	83
6.2.2. Parámetro conductivo medio	84
6.2.3. Parámetro conductivo alto	85
6.3. Comparación del movimiento sobre un medio óhmico y uno superconductor	86
6.3.1. Altura inicial baja	86
6.3.2. Altura inicial media	87
6.3.3. Altura inicial alta	88
<b>7. Conclusiones</b>	<b>89</b>
<b>Apéndice A. Simulaciones</b>	<b>91</b>
A.1. Dipolo magnético con geometría de varilla	93
A.2. Dipolo magnético con geometría de esfera	102
A.3. Dipolo magnético con geometría de disco	129
<b>Apéndice B. Ejemplo de código usado en MATHEMATICA®</b>	<b>157</b>
B.1. Código para simulaciones del medio superconductor	157
B.2. Código para simulaciones del medio óhmico	159
Índice de Figuras	161
Índice de Tablas	177
Índice de Códigos	179
Bibliografía	181

# Notación

---

TFM	Trabajo Fin de Máster
cdm	Centro de masas
C	Cantidad de movimiento
L	Momento cinético
I	Tensor de inercia
R	Matriz de rotación
F	Fuerza
M	Par
$\mu$	Momento dipolar magnético
e	Base
r	Posición
v	Velocidad
$\omega$	Velocidad de rotación
$\alpha$	Parámetro conductivo
$\beta$	Parámetro magnético
$\lambda$	Parámetro geométrico



# 1 Introducción

---

En este capítulo se introducen los conceptos de *levitación* y *superconductividad*, a partir de los cuales es posible definir el fenómeno de la **levitación por superconductores**, en el que se basa este trabajo fin de máster. Para contextualizar este fenómeno es necesario, además, incluir algunos *principios del electromagnetismo* como: campos electromagnéticos, magnetización y dipolos magnéticos, o ciertos conceptos adicionales como: estabilidad magnética o tipos de superconductores.

## 1.1 Levitación

La *levitación* se puede definir como el *equilibrio estable* de un cuerpo *sin* que exista *contacto* físico con un objeto sólido.<sup>[1]</sup> Para que un objeto levite es necesario contrarrestar la fuerza de la gravedad, cuya acción es ubicua, con una fuerza de repulsión que consiga mantener dicho objeto flotando sobre la fuente de fuerza o una fuerza de atracción generada por encima del objeto que permita mantener a este en suspensión de forma estable.

En función del origen de la fuerza generada para contrarrestar el efecto de la fuerza gravitatoria y conseguir que un objeto levite, se diferencian los siguiente métodos:<sup>[2]</sup>

**Levitación aerodinámica:** Empleo de la presión ejercida por un chorro de gas para controlar la dinámica de un objeto flotando.

**Levitación óptica:** Empleo de la presión de radiación ejercida sobre una superficie sólida por la transferencia de fotones.

**Levitación acústica:** Empleo de la presión de ondas acústicas emitidas, no necesariamente en frecuencias perceptibles por el oído humano, por un transductor y usando una configuración de reflector.

**Levitación electrostática:** Empleo del campo eléctrico para mantener en suspensión un objeto cargado eléctricamente, de manera que se encuentre en equilibrio mediante un campo eléctrico con control de realimentación, generado por un conjunto de electrodos alrededor de la muestra. No existen configuraciones de campos magnéticos estáticos que puedan hacer levitar una partícula cargada, de acuerdo al teorema de Earnshaw enunciado a continuación.

**Levitación magnética:** Empleo del campo magnético para conseguir mantener levitando un objeto con propiedades magnéticas. Al igual que en la levitación electrostática, no es posible conseguir mantener en suspensión de manera estable un objeto usando un campo magnético estático pero, a diferencia de esta, puede llevarse a cabo mediante la acción de un campo magnético con control de realimentación o empleando materiales diamagnéticos o superconductores.

La definición de estabilidad como el mínimo de energía potencial no es suficiente para comprender la levitación electrostática o magnética; puesto que no debe considerarse únicamente la estabilidad del cdm del sólido, sino que es necesario adquirir estabilidad en una orientación determinada de dicho cuerpo. Además, si el cuerpo que levita es deformable añade cierta complejidad adicional.<sup>[1]</sup>

Samuel Earnshaw determinó que un sistema de partículas no podía estar en equilibrio estable si las fuerzas involucradas se definían mediante una ley cuadrática inversa, como sucede con la fuerza gravitatoria, eléctrica y magnética. En 1842, enunció un teorema aplicado al campo eléctrico, cuya extensión incluyendo al campo magnético puede enunciarse de la siguiente forma:<sup>[3,4]</sup>

#### Teorema de Earnshaw

Un sistema de cargas eléctricas (o dipolos magnéticos) no pueden mantenerse en una condición de equilibrio estable estacionario bajo la única influencia de un campo eléctrico (o magnético) externo estático

Existen, sin embargo, ciertos sistemas donde es posible la levitación magnética como los comentados anteriormente. En concreto, en este trabajo nos centramos en los sistemas constituidos por **imanes permanentes y materiales superconductores**.

## 1.2 Principios del electromagnetismo

Un campo electromagnético puede ser descrito por las siguientes cuatro magnitudes:

Intensidad del campo eléctrico	$E$	$[V/m]$
Densidad de flujo eléctrico	$D$	$[C/m^2]$
Intensidad del campo magnético	$H$	$[A/m]$
Densidad del flujo magnético	$B$	$[Wb/m^2 \text{ o } T]$

Cuando no hay variación temporal en estas, las magnitudes del campo eléctrico ( $E, D$ ) son independientes de las magnitudes del campo magnético ( $H, B$ ). Sin embargo, en los casos en los que en los que existe dependencia temporal, estas magnitudes eléctricas y magnéticas se encuentran acopladas, esto es, una variación temporal de ( $E, D$ ) provocan una variación en ( $H, B$ ) y al contrario.<sup>[5]</sup>

Las propiedades electromagnéticas de los materiales se encuentran gobernadas por las denominadas *relaciones constitutivas* entre  $E, D, H$  y  $B$ , las cuales conforman las ecuaciones de Maxwell:

Ecuaciones de Maxwell	Generales	Simplificadas <sup>a</sup>
Ley de Gauss para el campo eléctrico	$\nabla \cdot D = \rho_E$ (1.1)	$\nabla \cdot D = \rho_E$ (1.5)
Ley de Lenz-Faraday	$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ (1.2)	$\nabla \times E = 0$ (1.6)
Ley de Gauss para el campo magnético	$\nabla \cdot B = 0$ (1.3)	$\nabla \cdot B = 0$ (1.7)
Ley de Ampère generalizada	$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$ (1.4)	$\nabla \times H = J$ (1.8)

Las ecuaciones 1.7 y 1.8 son las utilizadas para describir los fenómenos magnéticos bajo ciertas simplificaciones, como las empleadas en este TFM.

La intensidad del campo magnético y la densidad del flujo magnético se relacionan de la siguiente manera:

$$B = \mu_0 (H + M) \quad (1.9)$$

de forma que, fuera de un cuerpo magnetizable, el vector  $M$  adquiere un valor nulo y, por tanto esta relación se simplifica y queda como:

$$B = \mu_0 H \quad (1.10)$$

El flujo magnético a través de una superficie cerrada es siempre nulo; lo que simboliza que las cargas magnéticas puntuales no existen y las líneas de campo magnético no pueden comenzar ni terminar en ningún punto del campo como se desprende de la ecuación 1.7.

<sup>a</sup> En ausencia de campos variables con el tiempo, en el espacio libre

Un dipolo magnético es un elemento puntual caracterizado por un potencial vector:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.11)$$

que produce un campo magnético con el siguiente valor:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3[\boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \boldsymbol{\mu} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \quad (1.12)$$

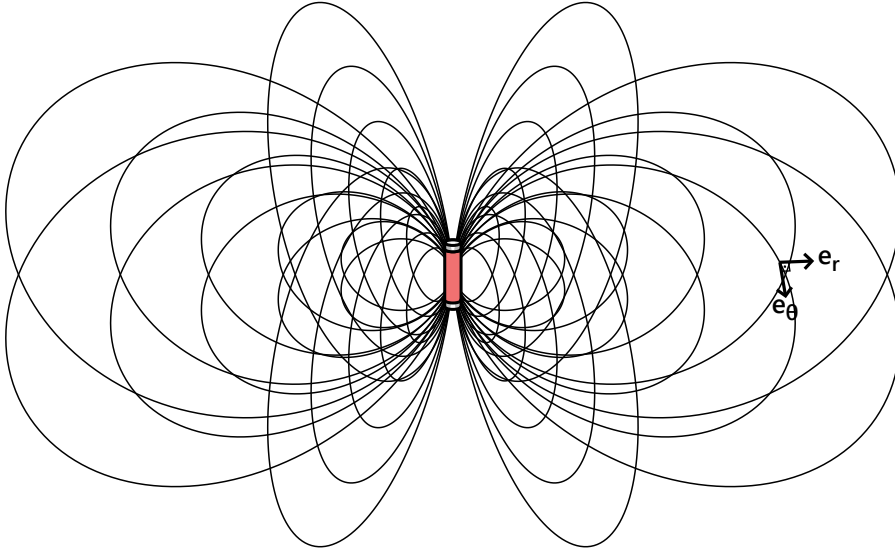


Figura 1.1 Líneas de campo de un dipolo magnético

En la figura 1.1 se representan las líneas de campo de un dipolo magnético – definidas como el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya tangente en un punto tiene la dirección del campo en ese punto –, la cual posee la misma estructura que el campo eléctrico de un dipolo eléctrico: líneas en forma de lóbulos que van del polo norte del dipolo hacia el polo sur.<sup>[6,7,8,9]</sup>

La cantidad que caracteriza a un dipolo es su momento dipolar magnético,  $\boldsymbol{\mu}$ , cuya magnitud en el Sistema Internacional es  $1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . Este valor es muy grande para las situaciones habituales. Por ejemplo, los momentos de las partículas elementales son cantidades del orden de un magnetón de Bohr:<sup>[10]</sup>

$$\mu_{\text{Bhor}} = \frac{eh}{2m_e c} = 927.400915(23) \times 10^{-26} \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \quad (1.13)$$

Existen dos visiones de los dipolos magnéticos:<sup>[11]</sup>

- **Modelo de Àmpere:** Considera un dipolo magnético como una pequeña espira de corriente, la cual define una cara norte (de la que salen las líneas del campo magnético) y una cara sur (por donde entran), de acuerdo con la regla de la mano derecha. Lleva siempre aparejado un momento angular.
- **Modelo de Gilbert:** Supone la existencia de polos magnéticos separados en el interior de un dipolo, de forma que cada dipolo está constituido por un polo norte (fuente de campo magnético) y un polo sur (sumidero). No necesita llevar aparejado un momento angular.

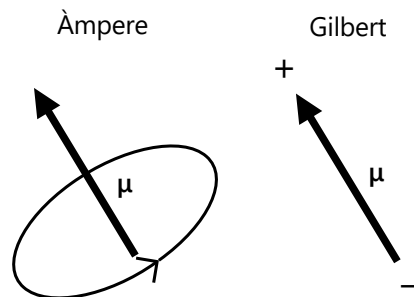


Figura 1.2 Modelo de dipolo magnético

Desde el punto de vista del campo que producen, ambos modelos son indistinguibles salvo en la posición puntual donde se encuentra el dipolo, la cual no suele ser accesible; de modo que, usualmente, se usa el modelo de Gilbert (similar al dipolo eléctrico) para formular las ecuaciones de forma más simple.

### 1.2.1 Magnetización

Se denominan materiales magnéticos a aquellos que, ante la aplicación de un campo magnético externo, los espines de los electrones que los conforman y sus momentos orbitales se ven sometidos a una ordenación tal que sus momentos dipolares magnéticos se alinean en ciertas orientaciones cuantizadas. Este fenómeno se designa como magnetización y, si un material magnético es magnetizado de manera uniforme, el momento magnético por unidad de volumen se llama polarización magnética o intensidad de magnetización.

Si la alineación magnética neta es, generalmente, en la misma dirección que el campo aplicado, el material se dice que es *paramagnético*; sin embargo, si la alineación magnética neta es predominantemente opuesta al campo aplicado, se dice que el material es *diamagnético*.

En estos materiales existe una temperatura máxima a la que las propiedades magnéticas desaparecen como consecuencia de la agitación térmica, denominada temperatura de Curie.<sup>[12,13]</sup>

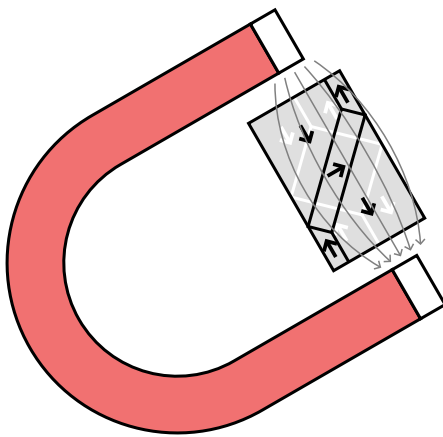


Figura 1.3 Ferromagnetismo<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Ordenamiento de dominios magnéticos

#### Ferromagnetismo

En un material ferromagnético, la aplicación del campo magnético dota a este de un ordenamiento magnético de largo alcance de los momentos dipolares magnéticos (debido a la interacción mecánica a nivel atómico) en la misma dirección y sentido en una región denominada *dominio*, aún tras la desaparición posterior de dicho campo.

La magnetización de un material ferromagnético proviene del crecimiento de los dominios del material en la dirección del campo magnético exterior aplicado, en lugar del reordenamiento de los dominios en la dirección y sentido de dicho campo. De esta manera, el alineamiento de los átomos puede dotar a los materiales ferromagnéticos de un magnetismo permanente en ausencia de un campo magnético externo. En general, el grado de magnetización de un material depende de la dirección y la intensidad del campo magnético externo aplicado.<sup>[13]</sup>

### 1.2.2 Corrientes parásitas

La ley de Faraday indica que el flujo del campo magnético a través de una superficie que cambia con el tiempo, bien porque el campo magnético cambia, porque lo hace la superficie o la posición relativa de ambos, surge una fuerza electromotriz inducida. Esta hace que aparezca una corriente inducida  $K$  que, cuando no es forzada a circular por un conductor bien definido, sino que lo hace a través de un material metálico de volumen no despreciable, reciben el nombre de corrientes parásitas o de Foucault. Cuando atraviesan un campo magnético, provocan una fuerza magnética sobre las cargas en movimiento.<sup>[14]</sup>

#### Freno magnético

Una aplicación de las corrientes parásitas es el llamado freno magnético, donde una de las múltiples concepciones del mismo consta de un disco de metal conductor en rotación de modo que, en cada instante, hay una porción del disco situado en una zona donde existe un campo magnético perpendicular al plano, generado por un par de imanes situados sobre el disco y por debajo de este, respectivamente. Como la superficie del disco atravesada por el campo magnético, generado por los dos imanes, cambia con el tiempo, aparecen unas corrientes parásitas en el disco, que provocan una fuerza magnética que se opone a la rotación del disco, frenándolo.<sup>[15,16]</sup>

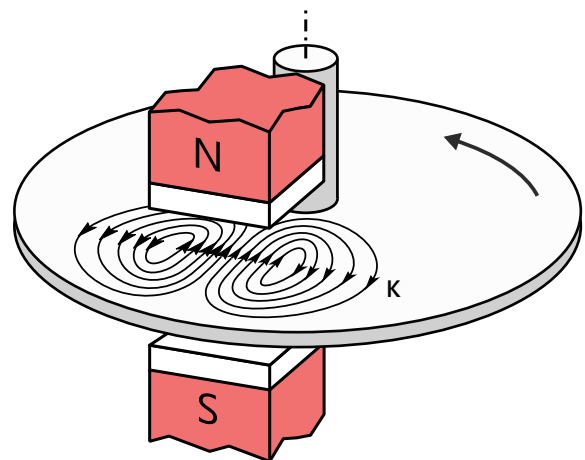


Figura 1.4 Freno magnético<sup>b</sup>

<sup>b</sup> Aplicación de las corrientes inducidas



### 1.3 Superconductividad

En 1908 Heike Kamerlingh Onnes consiguió por primera vez licuar helio que, a presión atmosférica, hierve a una temperatura de 4.2K. A partir de entonces comenzó a estudiar las propiedades eléctricas, térmicas y mecánicas de los materiales a temperaturas que solo se podían alcanzar utilizando helio líquido como refrigerante.

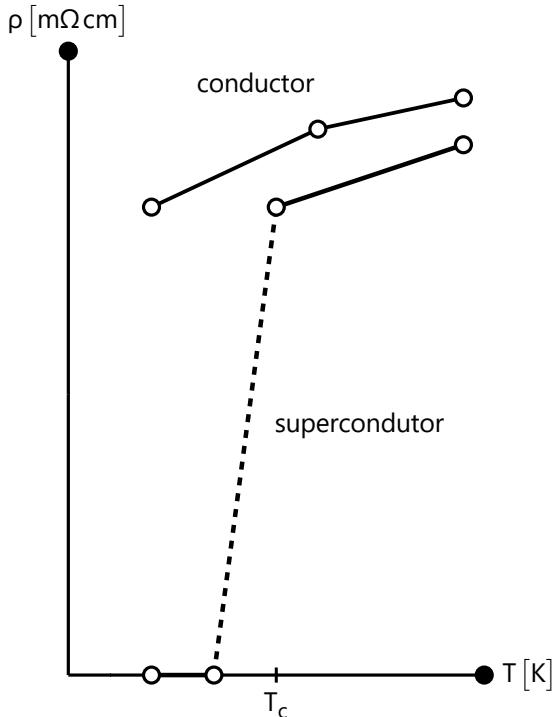


Figura 1.5 Resistividad frente a temperatura

En 1911, al medir la resistividad de una muestra de mercurio (líquido a temperatura ambiente con el que podía usar un proceso estándar de destilación para obtener gran pureza), cuando la temperatura descendió hasta un valor cercano a 4.2K, Onnes y sus colaboradores observaron que la resistividad disminuía prácticamente a cero, lo que implicaba una reducción de seis órdenes de magnitud.<sup>[5]</sup> Con este experimento demostró que, en ausencia de impurezas, la resistividad de metales muy puros disminuye conforme desciende la temperatura.

En 1913 descubrió la existencia de un valor umbral de densidad de corriente que puede asumir la muestra superconductora antes de revertir el estado y comportarse nuevamente como un conductor normal, cuyo valor aumenta conforme la temperatura disminuye por debajo de la temperatura crítica.

Por estos hallazgos, por los que se le concedió el premio Nobel de Física de 1913, se considera a Onnes como descubridor del fenómeno de la *superconductividad*.<sup>[17]</sup>

En 1914 observó la existencia de un valor crítico de intensidad de campo magnético, que depende de la temperatura, a partir del cual el estado superconductor desaparece:

$$H_c(T) = H_{c0} \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (1.14)$$

Fritz Walther Meissner junto con Robert Ochsenfeld descubrieron, en 1933, al observar que un superconductor era expulsado de un campo magnético el denominado **efecto Meissner-Ochsenfeld** mediante el cual, por debajo de la temperatura crítica, los metales se convertían en diamagnéticos perfectos.

Gorter y Casimir contribuyeron en 1934 a que se entendiera la superconductividad con el **modelo de los dos fluidos**, de acuerdo con el cual a lo largo del superconductor hay dos flujos de corriente, uno superconductor y otro normal. La fracción de electrones superconductores aumenta al bajar la temperatura, de forma que al llegar a temperaturas cercanas al cero absoluto todos los electrones están condensados en un superfluido.

En 1950 Reynolds, Serin y Maxwell comprobaron experimentalmente que la temperatura crítica estaba relacionada con la masa de los iones del material, lo que se conoce con el nombre de **efecto isotópico** y que hace pensar en la interacción de los electrones conductores con la red cristalina.

En ese mismo año, Herbert Frölich descubrió la interacción entre electrones y fonones (cuantos de vibraciones de la red cristalina), sentando las bases de la **Teoría Microscópica de la Superconductividad**. La teoría básica de la **interacción de un superconductor con un campo magnético externo** la desarrolló, en 1957, Alexei A. Abrikosov (premio Nobel de Física de 2003) en la que describía que el campo magnético, o bien es expulsado completamente de los que se denominan superconductores tipo I; o bien penetra parcialmente por los bordes en forma de vórtices cuánticos, creándose una estructura magnética ordenada llamada red de Abrikosov, en los llamados superconductores tipo II.<sup>[17,18]</sup>

### 1.3.1 Efecto Meissner-Ochsenfeld

Este fenómeno, que aparece cuando un material adquiere estado de superconductor, provoca la exclusión de flujo magnético que atraviesa al material por la aparición de un campo magnético interno de manera que, se consigue un campo magnético nulo en el interior del material.

Esta restricción de campo magnético nulo en el interior del material superconductor hace que el efecto difiera del de un diamagnético perfecto que surge de la ausencia de resistencia eléctrica.<sup>[9,19,20]</sup>

En el caso de un material conductor inmerso en un campo magnético, sometido a baja temperatura para enfriarlo hasta conseguir el estado de resistencia nula (diamagnético perfecto), el campo magnético permanece inalterable, atravesándolo. Sin embargo, el comportamiento magnético de un superconductor es tal que, el campo magnético al que estaba sometido inicialmente es excluido cuando la temperatura disminuye lo suficiente como para alcanzar la fase de cambio del estado superconductor.<sup>[17]</sup>

### 1.3.2 Modelo de los dos fluidos

En 1934, Cornelius Gorter y H.B.G. Casimir encontraron que muchas de las propiedades de los superconductores, incluyendo el efecto Meissner-Ochsenfeld, puede ser explicado mediante una relación constitutiva de densidad de corriente en un material en estado superconductor:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s \quad (1.15)$$

siendo  $\mathbf{J}_n$  y  $\mathbf{J}_s$  densidades de corriente de electrones normales y superconductores, respectivamente. Estas teorías se han desarrollado de manera paralela a las teorías de la superconductividad.<sup>[5,17]</sup>

### 1.3.3 Efecto isotópico

Este efecto, observado en los materiales superconductores, consiste en la variación de ciertas de sus propiedades, como pueden ser la temperatura (temperatura crítica,  $T_c$ ) o el campo magnético (campo magnético crítico,  $H_c$ ), al emplear muestras constituidas por distintos isótopos.

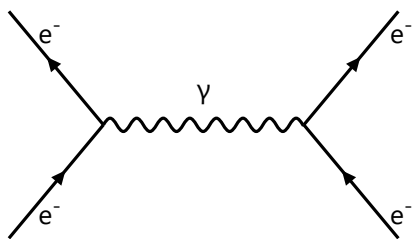
En concreto, la temperatura crítica, en muchos casos, disminuye según aumenta la masa atómica  $M$  de los átomos que forman la red, siguiendo la siguiente relación potencial:

$$T_c \propto \frac{1}{\sqrt{M}} \quad (1.16)$$

Sin embargo, se ha visto que con superconductores no convencionales (es decir, aquellos que no están explicados dentro de la teoría BCS, entre los que se incluyen los de alta temperatura) esta regularidad tiene muchas excepciones.<sup>[18,21]</sup>

### 1.3.4 Teoría BCS

La primera Teoría Microscópica de la Superconductividad, conocida como Teoría BCS fue desarrollada, en 1957, por John Bardeen, John Robert Schrieffer y Leon Cooper.



**Figura 1.6** Par de cooper (electrón-fonón)<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Diagrama de Feynman de la interacción  $e^- - \gamma$

La idea fundamental es que, a bajas temperatura, electrones de espín contrario se aparean por medio del intercambio de un fonón (*cuasipartícula* que se halla en redes cristalinas como la red atómica de un sólido) de modo que, la interacción electrón-fonón es atractiva y provoca el enlace de dos electrones, formando lo que se denomina un *par de cooper*.

Estos, que no obedecen el principio de exclusión de Pauli, condensan en un estado cuántico fundamental, fluyendo sin impedimentos por el interior de la red cristalina de manera colectiva y coherente.

Desde un punto de vista teórico, a partir de 1964 se proponen importantes aportaciones centradas en explicar el comportamiento de los superconductores de altas temperaturas, las que suponen que en el mecanismo de la superconductividad no solo intervienen las vibraciones de los electrones, sino que pueden intervenir incluso los electrones ligados en los enlaces químicos.<sup>[17]</sup>

En el modelo estándar los fermiones se describen como un tipo de partícula fundamental con espín semi-entero y como los constituyentes de la materia, mientras que los bosones son un tipo de partícula fundamental caracterizados por un valor de espín entero y por ser portadores de fuerza. De esta forma, un único electrón (fermión) se une a otro de la misma naturaleza para crear un par de electrones de manera que la pareja adquiere un valor de espín entero (bosón), lo que implica un cambio de un tipo de partícula elemental a otra.

Asimismo, un par de Cooper puede interactuar con otros electrones, de manera que la interacción entre estos se determina mediante la estadística Bose-Einstein, que es una descripción de cómo las partículas indistinguibles pueden ocupar diferentes estados de energía disponibles.

Dos bosones con idénticas propiedades pueden estar en el mismo lugar y el mismo instante mientras que, de acuerdo al principio de exclusión de Pauli, dos fermiones no. No hay un límite de número de bosones que pueden ocupar el mismo estado cuántico. Además, pueden intercambiarse dos bosones del mismo tipo y el sistema completo no se ve alterado, entonces se dice que la función de onda del sistema no se ha alterado.<sup>[23,24,25]</sup>

<div>2.3 MeV/c<sup>2</sup></div> <div><div>u</div><div>2/3</div><div>1/2</div><div>up</div></div>	<div>1.28 GeV/c<sup>2</sup></div> <div><div>c</div><div>2/3</div><div>1/2</div><div>charm</div></div>	<div>173.2 GeV/c<sup>2</sup></div> <div><div>t</div><div>2/3</div><div>1/2</div><div>top</div></div>	<div>← masa</div> <div>← carga</div> <div>← espín</div>	<div>125.1 GeV/c<sup>2</sup></div> <div><div>H</div><div>0</div><div>0</div><div>Higgs</div></div>
<div>4.8 MeV/c<sup>2</sup></div> <div><div>d</div><div>-1/3</div><div>1/2</div><div>down</div></div>	<div>95 MeV/c<sup>2</sup></div> <div><div>s</div><div>-1/3</div><div>1/2</div><div>strange</div></div>	<div>4.7 GeV/c<sup>2</sup></div> <div><div>b</div><div>-1/3</div><div>1/2</div><div>bottom</div></div>	quarks	<div>0 eV/c<sup>2</sup></div> <div><div>g</div><div>0</div><div>1</div><div>gluón</div></div>
<div>511 keV/c<sup>2</sup></div> <div><div>e</div><div>-1</div><div>1/2</div><div>electrón</div></div>	<div>105.7 MeV/c<sup>2</sup></div> <div><div>μ</div><div>-1</div><div>1/2</div><div>muón</div></div>	<div>1.777 GeV/c<sup>2</sup></div> <div><div>τ</div><div>-1</div><div>1/2</div><div>tau</div></div>	leptones	<div>0 eV/c<sup>2</sup></div> <div><div>γ</div><div>0</div><div>1</div><div>fotón</div></div>
<div>&lt;2 eV/c<sup>2</sup></div> <div><div>ν<sub>e</sub></div><div>0</div><div>1/2</div><div>neutrino e</div></div>	<div>&lt;190 keV/c<sup>2</sup></div> <div><div>ν<sub>μ</sub></div><div>0</div><div>1/2</div><div>neutrino μ</div></div>	<div>&lt;18.2 MeV/c<sup>2</sup></div> <div><div>ν<sub>τ</sub></div><div>0</div><div>1/2</div><div>neutrino τ</div></div>		
				<div>80.4 GeV/c<sup>2</sup></div> <div><div>W</div><div>±1</div><div>0</div><div>bosón W</div></div>
				<div>91.2 GeV/c<sup>2</sup></div> <div><div>Z</div><div>0</div><div>1</div><div>bosón Z</div></div>
				<div>bosones de gauge</div>
				<div>125.1 GeV/c<sup>2</sup></div> <div><div>H</div><div>0</div><div>0</div><div>Higgs</div></div>
				<div>fuerza nuclear fuerte</div>
				<div>fuerza electromagnética</div>
				<div>fuerza nuclear débil</div>

Figura 1.7 Modelo estándar de partículas<sup>[22]</sup>

### 1.3.5 Tipos de superconductores

En función del comportamiento del campo magnético en el interior de los materiales, al alcanzar propiedades superconductoras se distinguen:<sup>[26,17]</sup>

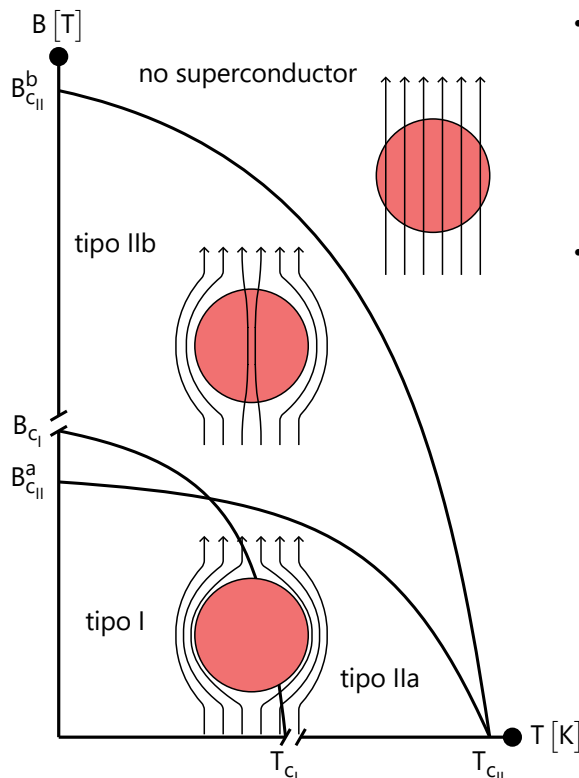


Figura 1.8 Superconductores tipo I y II

La categoría de superconductores tipo I, también conocidos como superconductores débiles, está principalmente compuesta por metales y metaloides, que muestran algún tipo de comportamiento conductor a temperatura ambiente. Requieren de una muy baja temperatura para ralentizar suficientemente las vibraciones moleculares y facilitar el flujo de electrones sin impedimentos; momento en el cual muestran una transición muy abrupta hacia el comportamiento superconductor.<sup>[27]</sup>

- **Superconductores tipo I:** Levitación repulsiva, basada en la exclusión de flujo por completo (efecto Meissner). En el régimen denominado tipo I, la totalidad del campo bajo el plano superconductor es nulo, esto es, las corrientes inducidas generan el suficiente flujo como para cancelar el flujo del dipolo fuente por debajo del superconductor
- **Superconductores tipo II:** Levitación repulsiva (o por suspensión), basada en la exclusión y atrapamiento parcial de flujo. El anclaje del campo magnético tiene lugar en los defectos de la estructura cristalina del superconductor, por lo general, límites de grano o impurezas. Por estos pequeños vórtices cuánticos, denominados de Abrikosov, circula a gran velocidad una corriente eléctrica, de manera que se quedan fijadas al material superconductor. Muestran una transición desde el estado normal al superconductor de manera gradual, a través de una región de comportamiento mixto:
  - Estado IIa: Comportamiento superconductor, equiparable a los conductores tipo I
  - Estado IIb: Comportamiento mixto, donde parte del flujo es atrapado y anclado en el interior del material superconductor

A excepción de los elementos V, Tc y Nb, la categoría de los superconductores tipo II, también conocidos como superconductores fuertes, la forman los compuestos metálicos y las aleaciones.

Su temperatura crítica es mayor que en los superconductores tipo I, por un mecanismo que no se comprende completamente (se presupone que está relacionado con la distribución en capas de las estructuras cristalinas de los compuestos), y la transición desde el estado normal al superconductor es gradual, a través de una región en la que muestran un comportamiento mixto.<sup>[28]</sup>

1 H Hidrógeno		2 He Helio																
3 Li Litio 0.38	4 Be Berilio 0.026	Número atómico 22 0.39 Símbolo Ti Nombre Titanio 3.35 (56)		Temperatura [K] Temperatura [K] @ presión [GPa]		Superconductividad ● presión ambiente ● presión alta		5 B Boro 1.1 (20)	6 C Carbono	7 N Nitrógeno	8 O Oxígeno 0.6 (10)	9 F Fluor	10 Ne Neón					
11 Na Sodio	12 Mg Magnesio	13 Al Aluminio 1.14	14 Si Silicio 9.2 (15.2)	15 P Fósforo 1.1 (10)	16 S Azufre 1.7 (10)	17 Cl Cloro	18 Ar Argón											
19 K Potasio	20 Ca Calcio 0.25 (2.7)	21 Sc Escandio 18.6 (10)	22 0.39 Ti Titanio 3.35 (56)	23 5.38 V Vanadio 16.5 (120)	24 Cr Cromo	25 Mn Manganeso	26 Fe Hierro 2.1 (12.1)	27 Co Cobalto	28 Ni Níquel	29 Cu Cobre	30 0.875 Zn Zinc	31 1.091 Ga Galio 7.1 (4)	32 Ge Germanio 5.5 (11.5)	33 As Arsénico 2.4 (32)	34 Se Selenio 8 (15)	35 Br Bromo 1.4 (100)	36 Kr Kriptón	
37 Rb Rubidio	38 Sr Estroncio 7 (20)	39 Y Itrio 19.5 (115)	40 0.546 Zr Zirconio 1.1 (20)	41 9.20 Nb Niobio 9.2 (10)	42 0.92 Mo Molibdeno	43 7.77 Tc Tecnecio	44 0.51 Ru Rutenio	45 3.3x10 <sup>-3</sup> Rh Rodio	46 Pd Paladio	47 Ag Plata	48 0.52 Cd Cadmio	49 In Indio	50 3.722 Sn Estañio 5.3 (11.3)	51 Sb Antimonio 2.8 (25)	52 Te Teluro 7.5 (35)	53 I Yodo 1.2 (23)	54 Xe Xenón	
55 Cs Cesio 1.3 (12)	56 Ba Bario 5 (10)	* 57 - 70	71 Lu Lutecio 12.4 (174)	72 0.12 Hf Hafnio 8.6 (62)	73 4.483 Ta Tantalio 4.5 (43)	74 0.012 W Wolframio	75 1.4 Re Renio	76 0.655 Os Osmio	77 0.14 Ir Iridio	78 Pt Platino	79 Au Oro	80 4.153 Hg Mercurio	81 -3.044 Tl Talio	82 7.193 Pb Plomo	83 Bi Bismuto 8.5 (9.1)	84 Po Polonio	85 At Astatido	86 Rn Radón
87 Fr Francio	88 Ra Radio	** 89 - 102	103 Lr Lawrencio	104 Rf Rutherfordio	105 Db Dubnio	106 Sg Seaborgio	107 Bh Bohrio	108 Hs Hassio	109 Mt Meitnerio	110 Ds Darmstadtio	111 Rg Roentgenio	112 Cn Copernicio	113 2.39 Nh Nihonio	114 Fl Flerovio	115 Mc Moscovia	116 Lv Livermorio	117 Ts Teneso	118 Og Oganesson
*Lantánidos			57 6.00 La Lantano 13 (15)	58 Ce Cerio 1.7 (5)	59 Pr Praseodimio	60 Nd Neodimio	61 Pm Prometio	62 Sm Samario	63 Eu Europio 2.75 (142)	64 Gd Gadolinio	65 Tb Terbio	66 Dy Disprosio	67 Ho Holmio	68 Er Erbio	69 Tm Tercio	70 Yb Yterbio		
**Actínidos			89 Ac Actinio	90 1.368 Th Torio	91 1.4 Pa Protactinio	92 0.8 U Uranio	93 Np Neptunio	94 Pu Plutonio	95 0.79 Am Americio	96 Cm Curio	97 Bk Berkeleyo	98 Cf Californio	99 Es Einsteinio	100 Fm Fermio	101 Md Mendelevio	102 No Nobelio		

Figura 1.9 Elementos<sup>a</sup> con comportamiento superconductor<sup>[29,30,31]</sup>

<sup>a</sup> Superconductores tipo I salvo V, Nb y Tc, que son superconductores tipo II

Algunas observaciones reseñables son:

- Los elementos ferromagnéticos no son superconductores
- Los mejores conductores eléctricos (Ag, Cu, Au, ...) no son superconductores
- El elemento con una temperatura crítica más baja es Rh con un valor  $3.3 \times 10^{-4}$  K, mientras que el elemento con mayor temperatura crítica a presión ambiente es Nb con un valor de 9.20 K

En 1962, Brian David Josephson realizó una importante predicción: una corriente eléctrica puede fluir entre dos elementos superconductoras separados por una fina capa aislante.<sup>[32]</sup>

Este efecto que fue corroborado experimentalmente un año después y por el cual recibiría el premio Nobel de Física de 1973, denominado **efecto Josephson**, cuyo origen se remonta al efecto túnel, es ampliamente utilizado en elementos como los SQUIDS (*Superconducting Quantum Inteferece Device*) para medir los campos magnéticos.

A raíz de los primeros descubrimientos de Onnes, la superconductividad se observó en multitud materiales<sup>b</sup> como sucedió en 1930 cuando se utilizó una aleación de BiPb, considerado como el primer superconductor tipo II investigado.

En 1986 acontece un hecho muy importante en este campo: se descubre, en unos óxidos de cobre con estructuras de perovskita – propia de materiales ferroeléctricos – una transición a estado superconductor a una temperatura crítica superior a la del nitrógeno líquido, lo que supuso el paso a los superconductores de alta temperatura (HTSC).<sup>[17]</sup>

<sup>b</sup> Figura 1.10

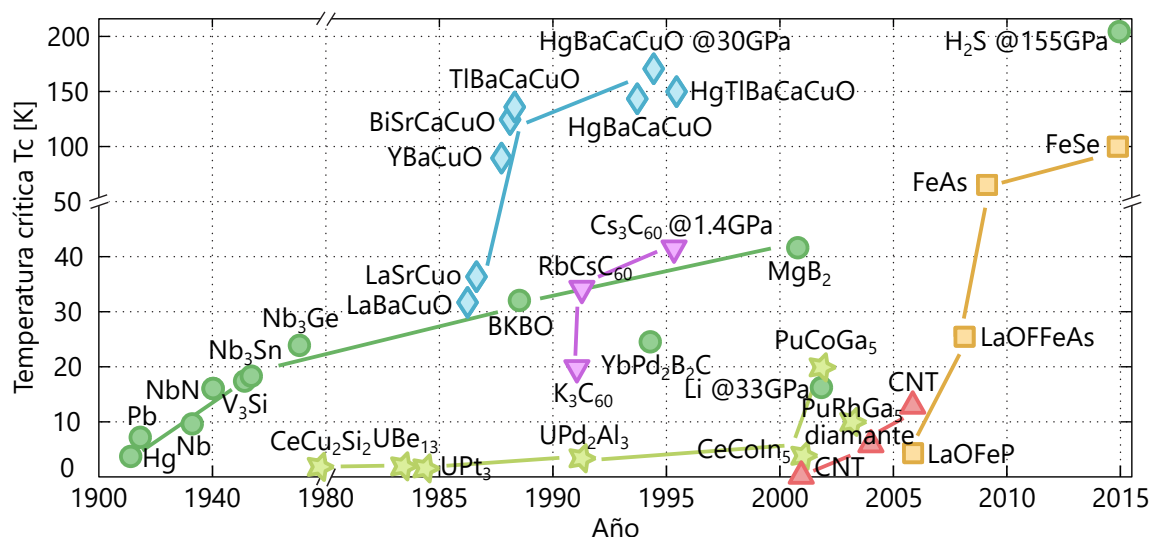


Figura 1.10 Descubrimiento cronológico de elementos superconductores según el material<sup>a</sup>

<sup>a</sup> ● Superconductores BCS, ★ superconductores de fermiones pesados, ▲ superconductores covalentes, ■ superconductores basados en hierro, ▼ fullerenos superconductores, ◆ cupratos

En la última década se han descubierto multitud de nuevos materiales superconductores a temperaturas mucho más elevadas (temperatura ambiente), denominados RTSC (*Room Temperature Superconductors*), lo cual podría suponer una revolución enorme en caso de poder ser utilizados en aplicaciones prácticas. [33,34,35]

## 1.4 Levitación por superconductores: Aplicaciones

Una aplicación de la superconductividad se encuentra en los vehículos magnéticamente levitados.<sup>[1]</sup>

### Levitación electrodinámica (EDL) o levitación repulsiva

Utiliza grandes imanes superconductores alojados en el vehículo, que generan corrientes inducidas sobre una guía o riel situada bajo el mismo.

El SCMaglev (maglev superconductor, formalmente llamado MLU) es un ferrocarril magnéticamente levitado desarrollado por la compañía *Central Japan Railway Company* y la empresa de investigación técnica *Railway Technical Research Institute*. En abril de 2015 alcanzó una velocidad de 603 km/h, estableciendo así un nuevo récord de velocidad para vehículos por raíles.<sup>[36]</sup>

El sistema utilizado consta de imanes superconductores y guías con dos pares de bobinas de metal con forma de 8 a lo largo de las paredes, conectadas entre sí por debajo de la pista del tren.

Dado que, a baja velocidad, el tren se sitúa por debajo del centro de las bobinas, emplazadas en las guías por las que este circula, se crea un campo magnético repulsivo opuesto al polo del imán superconductor – de acuerdo con la ley de Lenz – y un polo por encima del mismo, que lo atrae.

A medida que el tren acelera, el campo magnético producido por los imanes superconductores inducen una corriente en las bobinas, debido al efecto de inducción magnética del campo magnético, de manera que cuando alcanza una velocidad suficiente (alrededor de 150 km/h) consigue hacer que el tren levite sobre las guías. Estas sirven, además, como fuerzas estabilizadoras debido a que están interconectadas por debajo del riel; de modo que, si el tren se desplaza del centro, las corrientes inducidas lo centran de nuevo.<sup>[37,38]</sup>



## 2 Sistema mecánico

En este capítulo se describe el conjunto de ecuaciones que determinan la evolución de un sólido rígido que se deja caer desde cierta altura, sometido a determinadas fuerzas y pares. Para ello es necesario introducir un sistema de referencia respecto al cual se define la posición y orientación de dicho sólido.

### 2.1 Sistema de referencia

El movimiento general de un sólido rígido se caracteriza por seis grados de libertad que, por el teorema de Chasles, puede descomponerse en una traslación de un punto del sólido (caracterizado por tres grados de libertad) junto con una rotación de este (definido mediante otros tres grados de libertad) alrededor de dicho punto considerado como fijo en la rotación.<sup>[39]</sup>

La traslación de un sólido se define mediante las coordenadas de un punto concreto del mismo, denominado centro de reducción, respecto del sistema de referencia fijo {0}:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_0 + y\mathbf{j}_0 + z\mathbf{k}_0 \quad (2.1)$$

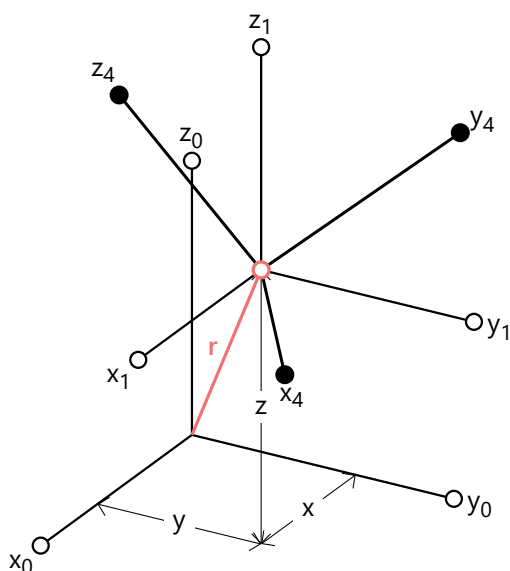


Figura 2.1 Sistemas de referencia<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Sistema de referencia fijo {0}, sistema de referencia {1} situado sobre el cdm del sólido rígido (paralelo al {0}) y sistema de referencia {4} ligado al sólido

La orientación de un sólido se puede definir mediante:

- Matriz de rotación, de 9 elementos sometidos a seis vínculos, que relaciona un sistema de referencia {4} ligado al sólido con el fijo {0}
- Orientación del eje de giro usando dos ángulos y el ángulo de giro alrededor de este eje
- Parámetros de Euler, que son un conjunto de cuatro variables, con un vínculo
- Parámetros de Cailey-Klein, que interpreta las rotaciones con números complejos
- Rotación general del sólido respecto a un sistema de referencia {1} paralelo al fijo {0}:

$$\mathbf{x}_1 \parallel \mathbf{x}_0 \quad \mathbf{y}_1 \parallel \mathbf{y}_0 \quad \mathbf{z}_1 \parallel \mathbf{z}_0$$

mediante una composición de tres rotaciones individuales sobre diferentes ejes

Dentro de este último grupo se establecen dos categorías para definir la orientación del sistema de referencia, en función de la secuencia de ejes en torno a los que este rota:

- **Ángulos de Euler:** El primer y el último eje de giro coinciden
- **Ángulos de Tait-Bryan:** Los tres ejes de giro son distintos

Estas rotaciones pueden definirse en torno a unos ejes fijos o alrededor de unos ejes intrínsecos, siendo esta segunda definición la empleada a continuación.

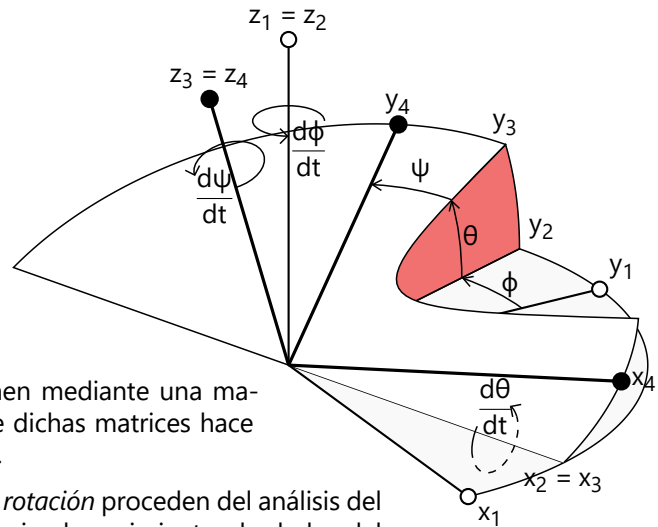
### 2.1.1 Ángulos de Euler

Uno de los sistemas más empleados con esta formulación es el denominado sistema  $z_1x_2z_3$ , caracterizado por las siguientes rotaciones:

- **Precesión ( $\phi$ )**  
Rotación del sistema de referencia {1} – caracterizado por el triedro  $(x_1 y_1 z_1)^T$  – alrededor del eje  $z_1$ , definiendo el sistema de referencia {2}
- **Nutación ( $\theta$ )**  
Rotación del sistema de referencia {2} – caracterizado por el triedro  $(x_2 y_2 z_2)^T$  – alrededor del eje  $x_2$ , definiendo el sistema de referencia {3}
- **Rotación propia ( $\psi$ )**  
Rotación del sistema de referencia {3} – caracterizado por el triedro  $(x_3 y_3 z_3)^T$  – alrededor del eje  $z_3$ , definiendo el sistema de referencia {4} ligado al sólido, caracterizado por el triedro  $(x_4 y_4 z_4)^T$

Figura 2.2 Ángulos de Euler  $z_1x_2z_3$ <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Definición de los sistemas de referencia {2}, {3} y {4} a partir del sistema de referencia {1} – paralelo al fijo {0} y situado en el cdm del sólido rígido – mediante giros de ángulos  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$  alrededor de los ejes  $z_1$ ,  $x_2$  y  $z_3$ , respectivamente



Cada una de estas transformaciones se definen mediante una matriz de rotación, de forma que el producto de dichas matrices hace posible pasar entre dos sistemas cualesquiera.

El origen de los nombres *precesión*, *nutación* y *rotación* proceden del análisis del movimiento terrestre los cuales hacen referencia al movimiento alrededor del eje terrestre, el movimiento de dicho eje que provoca que la estrella situada en el polo norte celeste vaya cambiando en el tiempo y al cambio en la inclinación del eje terrestre, respectivamente.<sup>[39]</sup>

### 2.1.2 Ángulos de Tait-Bryan

El sistema  $z_1y_2x_3$  es de gran utilidad en el ámbito de la aeronáutica, define los denominados ángulos de navegación y son utilizados para indicar el posicionamiento de una aeronave mediante tres giros consecutivos:

- **Guiñada:** Rotación alrededor del eje vertical  $z_1$  perpendicular al avión
- **Cabeceo:** Rotación alrededor del eje  $y_2$  que une las alas del avión
- **Alabeo:** Rotación alrededor del eje  $x_3$  que une la cola y el morro del avión

En este TFM se utilizará el sistema  $x_1y_2z_3$  con el que la orientación del sistema de referencia {4} ligado al sólido se determina mediante una secuencia de tres rotaciones alrededor de uno de los ejes que conforman la base tridimensional ortogonal de cada sistema de referencia definidos por el vector:

$$\mathbf{e}_i = (i_j \ j_i \ k_i)^T \quad \text{con } i = \{1, 2, 3\} \quad (2.2)$$

A continuación se desarrollan cada una de las rotaciones que conforman el sistema  $x_1y_2z_3$ , teniendo en cuenta que las matrices de rotación son ortogonales, esto es, cumplen la siguiente relación:

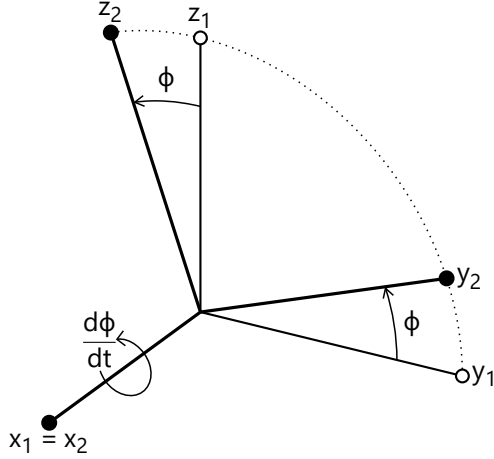
$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad (2.3)$$



### 2.1.2.1 Rotación alrededor del eje $x_1$

#### Sistema {2/1}: Movimiento en el plano $y_1z_1$

A partir del sistema de referencia {1}, definido como paralelo al sistema de referencia fijo {0} y situado en el cdm del sólido rígido a analizar, se define el sistema de referencia {2} mediante la siguiente transformación.



**Figura 2.3** Rotación 3D alrededor del eje  $x_1$ <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Definición del sistema de referencia {2} mediante un giro de ángulo  $\phi$  alrededor del eje  $x_1$  del sistema de referencia {1}

El sistema {2/1} queda definido por el vector velocidad angular:

$$\omega_{21} = \frac{d\phi}{dt} i_1 \quad (2.4)$$

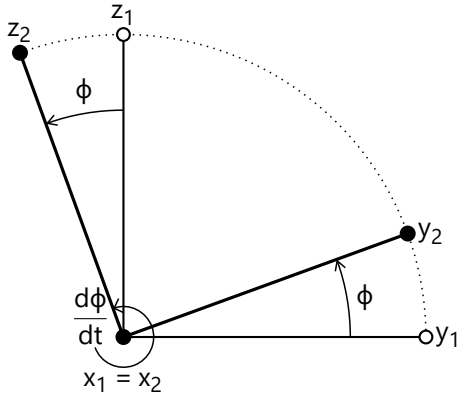
y caracterizado por un giro de ángulo  $\phi$  alrededor del eje  $x_1$  mediante la matriz de rotación:

$$R_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Las coordenadas en el sistema de referencia {2} se expresan en función de las coordenadas del sistema de referencia {1} como:

$$(x_2 \ y_2 \ z_2)^T = R_\phi (x_1 \ y_1 \ z_1)^T \quad (2.6)$$

Análogamente, las bases asociadas a sendos sistemas de referencia {1} y {2} se relacionan como sigue:



**Figura 2.4** Rotación 2D alrededor del eje  $x_1$ <sup>b</sup>

<sup>b</sup> Proyección del sistema de referencia {2} definido mediante un giro de ángulo  $\phi$  alrededor del eje  $x_1$  del sistema de referencia {1}

$$e_2|_1 = R_\phi^T e_1 \quad (2.7)$$

donde la matriz de rotación que enlaza ambos sistemas de referencia es:

$$R_\phi^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

De esta manera, los vectores unitarios que definen el sistema de referencia {2} en función de los vectores unitarios del sistema de referencia {1} son:

$$i_2|_1 = i_1 \quad (2.9)$$

$$j_2|_1 = \cos \phi j_1 + \sin \phi k_1 \quad (2.10)$$

$$k_2|_1 = -\sin \phi j_1 + \cos \phi k_1 \quad (2.11)$$

A partir de la expresión ecuación 2.7 es posible obtener los vectores unitarios que definen el sistema de referencia {1} en función de los vectores unitarios del sistema de referencia {2} como sigue:

$$e_1|_2 = R_\phi e_2 \quad (2.12)$$

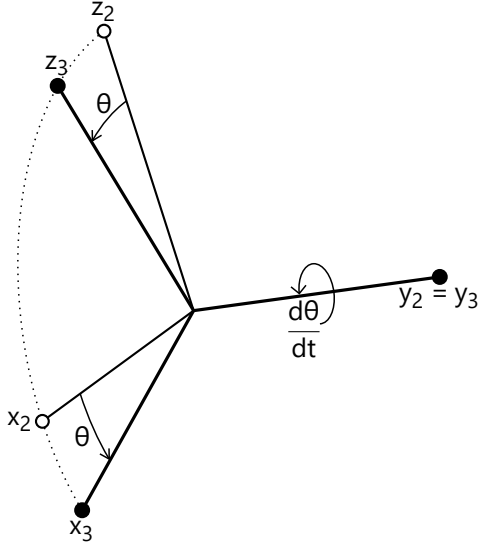
$$i_1|_2 = i_2 \quad (2.13)$$

$$j_1|_2 = \cos \phi j_2 - \sin \phi k_2 \quad (2.14)$$

$$k_1|_2 = \sin \phi j_2 + \cos \phi k_2 \quad (2.15)$$

2.1.2.2 Rotación alrededor del eje  $y_2$ Sistema {3/2}: Movimiento en el plano  $x_2z_2$ 

A partir del sistema de referencia {2} se define el sistema de referencia {3} mediante la siguiente transformación.



El sistema {3/2} queda definido por el vector velocidad angular:

$$\omega_{32} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{j}_2 \quad (2.16)$$

y caracterizado por un giro de ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $y_2$  mediante la matriz de rotación:

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

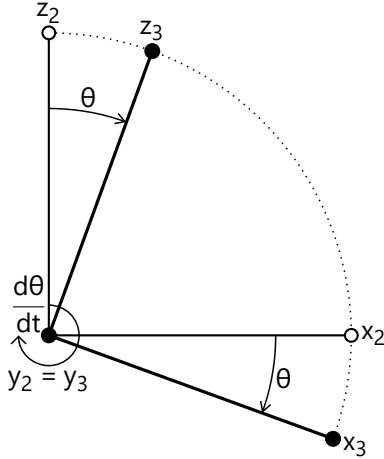
Las coordenadas en el sistema de referencia {3} se expresan en función de las coordenadas del sistema de referencia {2} como:

$$(\mathbf{x}_3 \ \mathbf{y}_3 \ \mathbf{z}_3)^T = \mathbf{R}_\theta (\mathbf{x}_2 \ \mathbf{y}_2 \ \mathbf{z}_2)^T \quad (2.18)$$

**Figura 2.5** Rotación 3D alrededor del eje  $y_2^a$

<sup>a</sup> Definición del sistema de referencia {3} mediante un giro de ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $y_2$  del sistema de referencia {2}

De forma que las bases asociadas a los sistemas de referencia {2} y {3} se relacionan como sigue:



**Figura 2.6** Rotación 2D alrededor del eje  $y_2^b$

<sup>b</sup> Proyección del sistema de referencia {3} definido mediante un giro de ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $y_2$  del sistema de referencia {2}

$$\mathbf{e}_3|_2 = \mathbf{R}_\theta^T \mathbf{e}_2 \quad (2.19)$$

donde la matriz de rotación que enlaza ambos sistemas de referencia es:

$$\mathbf{R}_\theta^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

De esta manera, los vectores unitarios que definen el sistema de referencia {3} en función de los vectores unitarios del sistema de referencia {2} son:

$$\mathbf{i}_3|_2 = \cos \theta \mathbf{i}_2 - \sin \theta \mathbf{k}_2 \quad (2.21)$$

$$\mathbf{j}_3|_2 = \mathbf{j}_2 \quad (2.22)$$

$$\mathbf{k}_3|_2 = \sin \theta \mathbf{i}_2 + \cos \theta \mathbf{k}_2 \quad (2.23)$$

A partir de la expresión 2.19 es posible obtener los vectores unitarios que definen el sistema de referencia {2} en función de los vectores unitarios del sistema de referencia {3} como sigue:

$$\mathbf{e}_2|_3 = \mathbf{R}_\theta \mathbf{e}_3 \quad (2.24)$$

$$\mathbf{i}_2|_3 = \cos \theta \mathbf{i}_3 + \sin \theta \mathbf{k}_3 \quad (2.25)$$

$$\mathbf{j}_2|_3 = \mathbf{j}_3 \quad (2.26)$$

$$\mathbf{k}_2|_3 = -\sin \theta \mathbf{i}_3 + \cos \theta \mathbf{k}_3 \quad (2.27)$$

**Sistema {3/1}: Movimiento en los planos  $y_1z_1$  y  $x_2z_2$** 

El sistema {3/1} queda definido por la sucesión de rotaciones alrededor de los ejes  $x_1$  e  $y_2$ , de modo que relaciona los sistemas de referencia {1} y {3}, es decir:

$$\text{Sistema } \{3/1\} = \text{Sistema } \{3/2\} + \text{Sistema } \{2/1\}$$

Formalmente, este sistema se caracteriza por la suma de dos rotaciones cuyas velocidades angulares están descritas en las ecuaciones 2.16 y 2.4:

$$\omega_{31} = \omega_{32} + \omega_{21} = \frac{d\theta}{dt} j_2 + \frac{d\phi}{dt} i_1 \quad (2.28)$$

De acuerdo con las ecuaciones 2.19 y 2.7, las bases asociadas a dichos sistemas de referencia {1} y {3} se relacionan como sigue:

$$e_3|_1 = e_3|_2 e_2|_1 = R_\theta^T R_\phi^T e_1 \quad (2.29)$$

donde la matriz de rotación que liga las bases de los sistemas de referencia {1} y {3} se obtiene mediante el producto de las matrices 2.20 y 2.8:

$$R_\theta^T R_\phi^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\phi \sin\theta & -\cos\phi \sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\theta & -\sin\phi \cos\theta & \cos\phi \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

De esta manera, los vectores unitarios que definen el sistema de referencia {3} en función de los vectores unitarios del sistema de referencia {1} son:

$$i_3|_1 = \cos\theta i_1 + \sin\phi \sin\theta j_1 - \cos\phi \sin\theta k_1 \quad (2.31)$$

$$j_3|_1 = \cos\phi j_1 + \sin\phi k_1 \quad (2.32)$$

$$k_3|_1 = \sin\theta i_1 - \sin\phi \cos\theta j_1 + \cos\phi \cos\theta k_1 \quad (2.33)$$

A partir de la expresión 2.29 es posible obtener la relación inversa entre las bases de los sistemas de referencia {1} y {3}:

$$e_1|_3 = \left( R_\theta^T R_\phi^T \right)^T e_3 = R_\phi R_\theta e_3 \quad (2.34)$$

siendo la matriz que relaciona dicha transformación la transpuesta de la matriz 2.30:

$$R_\phi R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta & \cos\phi & -\sin\phi \cos\theta \\ -\cos\phi \sin\theta & \sin\phi & \cos\phi \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Así que, los vectores unitarios que conforman el sistema de referencia {1} en función de los vectores unitarios que definen el sistema de referencia {3} son:

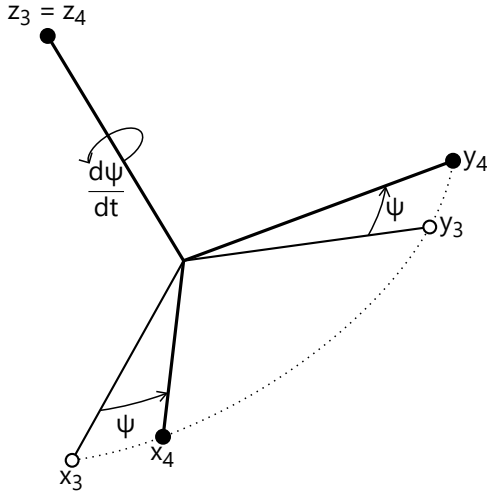
$$i_1|_3 = \cos\theta i_3 + \sin\theta k_3 \quad (2.36)$$

$$j_1|_3 = \sin\phi \sin\theta i_3 + \cos\phi j_3 - \sin\phi \cos\theta k_3 \quad (2.37)$$

$$k_1|_3 = -\cos\phi \sin\theta i_3 + \sin\phi j_3 + \cos\phi \cos\theta k_3 \quad (2.38)$$

2.1.2.3 Rotación alrededor del eje  $z_3$ Sistema {4/3}: Movimiento en el plano  $x_3y_3$ 

A partir del sistema de referencia {3} se define el sistema de referencia {4} mediante la siguiente transformación.



**Figura 2.7** Rotación 3D alrededor del eje  $z_3^a$

<sup>a</sup> Definición del sistema de referencia {4} mediante un giro de ángulo  $\psi$  alrededor del eje  $z_3$  del sistema de referencia {3}

El sistema {4/3} queda definido por el vector velocidad angular:

$$\omega_{43} = \frac{d\psi}{dt} \mathbf{k}_3 \quad (2.39)$$

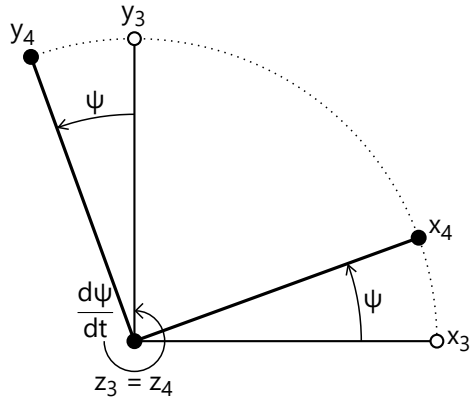
y caracterizado por un giro de ángulo  $\psi$  alrededor del eje  $z_3$  mediante la matriz de rotación:

$$\mathbf{R}_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Las coordenadas en el sistema de referencia {4} se expresan en función de las coordenadas del sistema de referencia {3} como:

$$(\mathbf{x}_4 \ \mathbf{y}_4 \ \mathbf{z}_4)^T = \mathbf{R}_\psi (\mathbf{x}_3 \ \mathbf{y}_3 \ \mathbf{z}_3)^T \quad (2.41)$$

De forma que las bases asociadas a los sistemas de referencia {3} y {4} se relacionan como sigue:



**Figura 2.8** Rotación 2D alrededor del eje  $z_3^b$

<sup>b</sup> Proyección del sistema de referencia {4} definido mediante un giro de ángulo  $\psi$  alrededor del eje  $z_3$  del sistema de referencia {3}

$$\mathbf{e}_4|_3 = \mathbf{R}_\psi^T \mathbf{e}_3 \quad (2.42)$$

donde la matriz de rotación que enlaza ambos sistemas de referencia es:

$$\mathbf{R}_\psi^T = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

De esta manera, los vectores unitarios que definen el sistema de referencia {4} en función de los vectores unitarios del sistema de referencia {3} son:

$$\mathbf{i}_4|_3 = \cos \psi \mathbf{i}_3 + \sin \psi \mathbf{j}_3 \quad (2.44)$$

$$\mathbf{j}_4|_3 = -\sin \psi \mathbf{i}_3 + \cos \psi \mathbf{j}_3 \quad (2.45)$$

$$\mathbf{k}_4|_3 = \mathbf{k}_3 \quad (2.46)$$

A partir de la expresión 2.42 es posible obtener los vectores unitarios que definen el sistema de referencia {3} en función de los vectores unitarios del sistema de referencia {4} como sigue:

$$\mathbf{e}_3|_4 = \mathbf{R}_\psi \mathbf{e}_4 \quad (2.47)$$

$$\mathbf{i}_3|_4 = \cos \psi \mathbf{i}_4 - \sin \psi \mathbf{j}_4 \quad (2.48)$$

$$\mathbf{j}_3|_4 = \sin \psi \mathbf{i}_4 + \cos \psi \mathbf{j}_4 \quad (2.49)$$

$$\mathbf{k}_3|_4 = \mathbf{k}_4 \quad (2.50)$$

**Sistema {4/1}: Movimiento en los planos  $y_1z_1$ ,  $x_2z_2$  y  $x_3y_3$** 

El sistema {4/1} queda definido por la sucesión de rotaciones alrededor de los ejes  $x_1$ ,  $y_2$  y  $z_3$ , de manera que relaciona los sistemas de referencia {1} y {4}, es decir:

$$\text{Sistema } \{4/1\} = \text{Sistema } \{4/3\} + \text{Sistema } \{3/2\} + \text{Sistema } \{2/1\}$$

Formalmente, este sistema se caracteriza por la suma de tres rotaciones cuyas velocidades angulares están descritas en las ecuaciones 2.39, 2.16 y 2.4:

$$\omega_{41} = \omega_{43} + \omega_{32} + \omega_{21} = \frac{d\psi}{dt} \mathbf{k}_3 + \frac{d\theta}{dt} \mathbf{j}_2 + \frac{d\phi}{dt} \mathbf{i}_1 \quad (2.51)$$

De acuerdo con las ecuaciones 2.42, 2.19 y 2.7, las bases asociadas a dichos sistemas de referencia se relacionan como sigue:

$$\mathbf{e}_4|_1 = \mathbf{e}_4|_3 \mathbf{e}_3|_2 \mathbf{e}_2|_1 = \mathbf{R}_\psi^T \mathbf{R}_\theta^T \mathbf{R}_\phi^T \mathbf{e}_1 \quad (2.52)$$

siendo la composición de estas tres matrices de rotación:

$$\mathbf{R}_\psi^T \mathbf{R}_\theta^T \mathbf{R}_\phi^T = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\psi & \cos\phi \sin\psi + \sin\phi \sin\theta \cos\psi & \sin\phi \sin\psi - \cos\phi \sin\theta \cos\psi \\ -\cos\theta \sin\psi & \cos\phi \cos\psi - \sin\phi \sin\theta \sin\psi & \sin\phi \cos\psi + \cos\phi \sin\theta \sin\psi \\ \sin\theta & -\sin\phi \cos\theta & \cos\phi \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Así pues, los vectores unitarios que definen la base del sistema de referencia {4} ligado al sólido en función de los vectores unitarios que definen el sistema de referencia {1} son:

$$\mathbf{i}_4|_1 = \cos\theta \cos\psi \mathbf{i}_1 + (\cos\phi \sin\psi + \sin\phi \sin\theta \cos\psi) \mathbf{j}_1 + (\sin\phi \sin\psi - \cos\phi \sin\theta \cos\psi) \mathbf{k}_1 \quad (2.54)$$

$$\mathbf{j}_4|_1 = -\cos\theta \sin\psi \mathbf{i}_1 + (\cos\phi \cos\psi - \sin\phi \sin\theta \sin\psi) \mathbf{j}_1 + (\sin\phi \cos\psi + \cos\phi \sin\theta \sin\psi) \mathbf{k}_1 \quad (2.55)$$

$$\mathbf{k}_4|_1 = \sin\theta \mathbf{i}_1 - \sin\phi \cos\theta \mathbf{j}_1 + \cos\phi \cos\theta \mathbf{k}_1 \quad (2.56)$$

A partir de la expresión 2.52 es posible obtener la relación inversa entre las bases de los sistemas de referencia {1} y {4}:

$$\mathbf{e}_1|_4 = \left( \mathbf{R}_\psi^T \mathbf{R}_\theta^T \mathbf{R}_\phi^T \right)^T \mathbf{e}_4 = \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\phi \mathbf{e}_4 \quad (2.57)$$

donde el producto de las matrices que relaciona dichas bases es la transpuesta de la matriz 2.53:

$$\mathbf{R}_\phi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\psi = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\psi & -\cos\theta \sin\psi & \sin\theta \\ \cos\phi \sin\psi + \sin\phi \sin\theta \cos\psi & \cos\phi \cos\psi - \sin\phi \sin\theta \sin\psi & -\sin\phi \cos\theta \\ \sin\phi \sin\psi - \cos\phi \sin\theta \cos\psi & \sin\phi \cos\psi + \cos\phi \sin\theta \sin\psi & \cos\phi \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

De esta forma, los vectores unitarios del sistema de referencia {1} en función de los vectores unitarios que definen el sistema de referencia ligado al sólido son:

$$\mathbf{i}_1|_4 = \cos\theta \cos\psi \mathbf{i}_4 - \cos\theta \sin\psi \mathbf{j}_4 + \sin\theta \mathbf{k}_4 \quad (2.59)$$

$$\mathbf{j}_1|_4 = (\cos\phi \sin\psi + \sin\phi \sin\theta \cos\psi) \mathbf{i}_4 + (\cos\phi \cos\psi - \sin\phi \sin\theta \sin\psi) \mathbf{j}_4 - \sin\phi \cos\theta \mathbf{k}_4 \quad (2.60)$$

$$\mathbf{k}_1|_4 = (\sin\phi \sin\psi - \cos\phi \sin\theta \cos\psi) \mathbf{i}_4 + (\sin\phi \cos\psi + \cos\phi \sin\theta \sin\psi) \mathbf{j}_4 + \cos\phi \cos\theta \mathbf{k}_4 \quad (2.61)$$

### Ángulos de Tait-Bryan: Sistema $x_1y_2z_3$

La composición de las tres rotaciones  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  en torno a los ejes  $x_1$ ,  $y_2$  y  $z_3$ , respectivamente, da lugar al sistema  $x_1y_2z_3$ , mostrado en la figura 2.9, en la que se indican las transformaciones realizadas para pasar del sistema de referencia {1} al sistema de referencia {4} ligado al sólido.

Este sistema es el que se usará para definir la orientación del sólido a analizar y que, a modo de sumario, se define mediante tres transformaciones elementales de rotación alrededor de sus correspondientes ejes de giro, de manera secuencial:

- **Movimiento en el plano  $y_1z_1$**

Rotación del sistema de referencia {1} – caracterizado por el triedro  $(x_1 y_1 z_1)^T$  – un ángulo  $\phi$  alrededor del eje  $x_1$ , dando lugar al sistema de referencia {2}.

Esta transformación se representa por medio de la matriz de rotación  $R_\phi$  definida en la ecuación 2.5

- **Movimiento en el plano  $x_2z_2$**

Rotación del sistema de referencia {2} – caracterizado por el triedro  $(x_2 y_2 z_2)^T$  – un ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $y_2$ , dando lugar al sistema de referencia {3}.

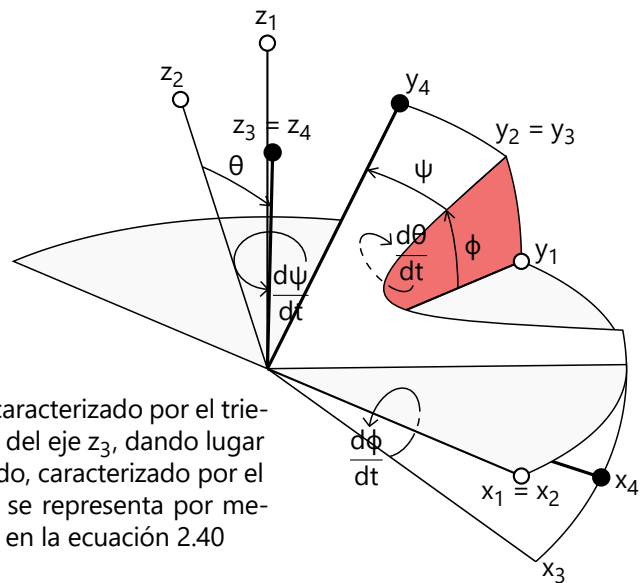
Esta transformación se representa por medio de la matriz de rotación  $R_\theta$  definida en la ecuación 2.17

- **Movimiento en el plano  $x_3y_3$**

Rotación del sistema de referencia {3} – caracterizado por el triedro  $(x_3 y_3 z_3)^T$  – un ángulo  $\psi$  alrededor del eje  $z_3$ , dando lugar al sistema de referencia {4} ligado al sólido, caracterizado por el triedro  $(x_4 y_4 z_4)^T$ . Esta transformación se representa por medio de la matriz de rotación  $R_\psi$  definida en la ecuación 2.40

**Figura 2.9** Ángulos de Tait-Bryan  $x_1y_2z_3$ <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Definición de los sistemas de referencia {2}, {3} y {4} a partir del sistema de referencia {1} – paralelo al fijo {0} y situado en el cdm del sólido rígido – mediante giros de ángulo  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$  alrededor de los ejes  $x_1$ ,  $y_2$  y  $z_3$ , respectivamente



De modo que el sistema queda definido mediante la matriz de rotación 2.58, combinación de estas tres rotaciones elementales (o según la transformación inversa, definida por la matriz de rotación 2.53).

## 2.2 Definición del sistema

El sistema a analizar está compuesto por un sólido rígido con simetría de revolución, sometido a diversas fuerzas y pares, el cual se deja caer desde cierta altura respecto al sistema de referencia fijo.

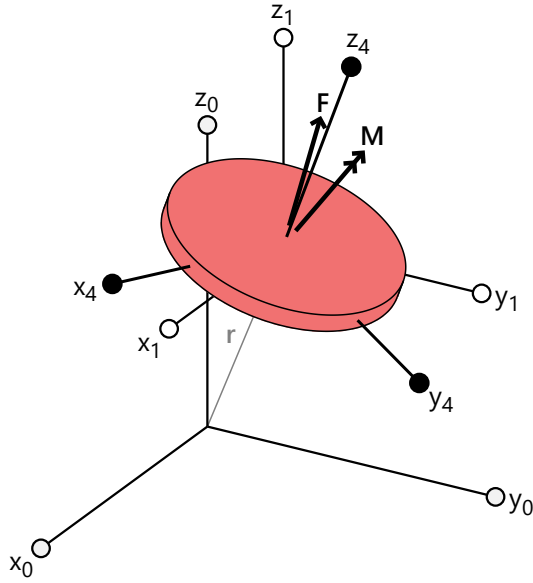


Figura 2.10 Fuerzas y pares sobre un sólido<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Representación de las fuerzas y pares ejercidos sobre un sólido rígido con cdm situado en una posición  $r$  respecto al sistema de referencia fijo  $\{0\}$  y con orientación definida de acuerdo con el sistema de referencia  $\{4\}$

Con el objetivo de simplificar la mención a los sistemas de referencia en los que están expresadas las ecuaciones a utilizar se emplea la siguiente notación:

- Sistema de referencia  $\{1\}$

$$(x_1 \ y_1 \ z_1)^T \equiv (x \ y \ z)^T$$

- Sistema de referencia  $\{2\}$

$$(x_2 \ y_2 \ z_2)^T \equiv (\bar{x} \ \bar{y} \ \bar{z})^T$$

- Sistema de referencia  $\{3\}$

$$(x_3 \ y_3 \ z_3)^T \equiv (X \ Y \ Z)^T$$

- Sistema de referencia  $\{4\}$

$$(x_4 \ y_4 \ z_4)^T \equiv (\bar{X} \ \bar{Y} \ \bar{Z})^T$$

Reduciendo sobre el cdm del sólido en el sistema de referencia  $\{1\}$  las fuerzas y pares totales que actúan sobre el mismo, las ecuaciones dinámicas generales que definen el movimiento de este son:

$$\text{Cantidad de movimiento} \quad \left. \frac{dC}{dt} \right|_1 \equiv m \left. \frac{dv}{dt} \right|_1 = F \quad (2.62)$$

$$\text{Momento cinético} \quad \left. \frac{dL}{dt} \right|_1 \equiv \frac{d(I_i \cdot \omega_{41})}{dt} \Big|_1 + \omega_{i1} \times (I_i \cdot \omega_{41}) = M \quad \text{con } i = \{3,4\} \quad (2.63)$$

donde la formulación de la ecuación 2.63 depende del sistema de referencia en el cual se proyecte.

El tensor de inercia se puede definir en ejes principales, teniendo en cuenta la simetría de revolución respecto al eje  $z$  en el sistema de referencia ligado al sólido:

$$I_4 = \begin{pmatrix} I_{\bar{X}\bar{X}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\bar{Y}\bar{Y}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\bar{Z}\bar{Z}} \end{pmatrix} \quad \text{con } I_{\bar{X}\bar{X}} = I_{\bar{Y}\bar{Y}} \quad (2.64)$$

Aprovechando dicha simetría, este tensor puede definirse mediante una expresión equivalente en el sistema de referencia  $\{3\}$  y con los mismos valores que en el sistema de referencia  $\{4\}$ :

$$I_3 = \begin{pmatrix} I_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & I_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ZZ} \end{pmatrix} \quad \text{con } I_{XX} = I_{YY} \quad (2.65)$$

La **fórmula de Poisson** permite definir la derivada de un vector respecto de diferentes sistemas de referencia, mediante la rotación angular entre dichos sistemas de referencia según la siguiente formulación:

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_j = \left. \frac{dr}{dt} \right|_i + \omega_{ij} \times r \quad (2.66)$$

### 2.2.1 Formulación con ángulos de Tait-Bryan

Debido a la simetría de revolución del sólido rígido en torno al eje  $z$  en el sistema de referencia ligado, en lugar de proyectar sobre el sistema de referencia {4} resulta conveniente proyectar sobre el sistema de referencia {3} con el objetivo de simplificar la formulación del problema a estudiar.

De esta forma las ecuaciones 2.62 y 2.63 quedan de la siguiente manera:

$$\text{Ecuaciones de Newton} \quad \left. \frac{dC}{dt} \right|_1 \equiv m \left. \frac{dv}{dt} \right|_1 = F \quad (2.67)$$

$$\text{Ecuaciones de Euler} \quad \left. \frac{dL}{dt} \right|_1 \equiv \left. \frac{d(I_3 \cdot \omega_{41})}{dt} \right|_3 + \omega_{31} \times (I_3 \cdot \omega_{41}) = M \quad (2.68)$$

Esta formulación se basa en la definición de las ecuaciones de Euler mediante el vector velocidad angular proyectado sobre el sistema de referencia {3}, mediante el uso de ángulos de Tait-Bryan:

$$\omega_{41} = \omega_X i_3 + \omega_Y j_3 + \omega_Z i_3 \quad (2.69)$$

Para hallar las ecuaciones de Newton únicamente es necesario definir las coordenadas de la velocidad del sólido en el sistema de referencia {1}, mientras que para hallar las ecuaciones de Euler hace falta determinar el valor de dos términos en función del momento cinético y la velocidad de rotación del sólido, expresados en el sistema de referencia {3}.

Teniendo en cuenta que el sistema de referencia {3} se define a partir de un giro alrededor del eje  $y_2$  del sistema de referencia {2} y que, por tanto, el vector unitario en dicha dirección en ambos sistemas de referencia es idéntico, el vector velocidad angular definido en el sistema de referencia {4}<sup>a</sup> se puede expresar así en el sistema de referencia {3}:

$$\omega_{41} = \frac{d\phi}{dt} \cos\theta i_3 + \frac{d\theta}{dt} j_3 + \left( \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \sin\theta \right) k_3 \quad (2.70)$$

De igual manera, el vector velocidad angular definido en el sistema de referencia {3}<sup>b</sup> se puede expresar en dicho sistema de referencia como sigue:

$$\omega_{31} = \frac{d\phi}{dt} \cos\theta i_3 + \frac{d\theta}{dt} j_3 + \frac{d\phi}{dt} \sin\theta k_3 \quad (2.71)$$

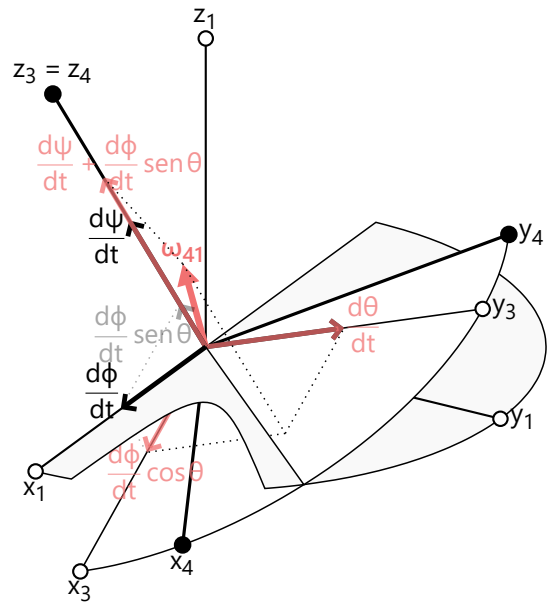


Figura 2.11 Componentes del vector  $\omega_{41}^c$

<sup>c</sup> Proyecciones del vector velocidad angular del sólido sobre el sistema de referencia {3}

Teniendo en cuenta las ecuaciones 2.69 y 2.70, la ecuación 2.71 se puede reescribir en función de las componentes de la velocidad angular  $\omega_{41}$  en el sistema de referencia {3} de esta forma:

$$\omega_{31} = \omega_X i_3 + \omega_Y j_3 + \omega_X \tan\theta k_3 \quad (2.72)$$

#### Términos de las ecuaciones de Euler

La derivada del momento cinético proyectada en el sistema de referencia {3} queda:

$$\left. \frac{d(I_3 \cdot \omega_{41})}{dt} \right|_3 \equiv I_3 \cdot \left. \frac{d\omega_{41}}{dt} \right|_3 = I_{XX} \left( \frac{d\omega_X}{dt} i_3 + \frac{d\omega_Y}{dt} j_3 \right) + I_{ZZ} \frac{d\omega_Z}{dt} k_3 \quad (2.73)$$

mientras que el producto vectorial de la velocidad angular y el momento cinético es:

$$\omega_{31} \times (I_3 \cdot \omega_{41}) = \omega_Y (I_{ZZ}\omega_Z - I_{XX}\omega_X \tan\theta) i_3 + \omega_X (I_{XX}\omega_X \tan\theta - I_{ZZ}\omega_Z) j_3 \quad (2.74)$$

<sup>a</sup> Ecuación 2.51

<sup>b</sup> Ecuación 2.28



### Ecuaciones que definen el sistema

A partir de las ecuaciones cinemáticas se define la posición y orientación del sólido:

- **Posición:** Definición de la velocidad del sólido como la variación de la posición del mismo

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad (2.75)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \quad (2.76)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z \quad (2.77)$$

- **Orientación:** Evolución de la orientación del sólido, definida mediante los ángulos de Tait-Bryan, en función de las componentes del vector velocidad angular<sup>a</sup>

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega_x}{\cos\theta} \quad (2.78)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_y \quad (2.79)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_z - \omega_x \tan\theta \quad (2.80)$$

A partir de las ecuaciones dinámicas, denominadas ecuaciones de Newton-Euler, se determina la velocidad y velocidad angular del sólido:

- **Velocidad:** Ecuaciones de Newton<sup>b</sup>

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x \quad (2.81)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = F_y \quad (2.82)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = F_z \quad (2.83)$$

- **Velocidad angular:** Ecuaciones de Euler<sup>c</sup> usando la formulación de ángulos de Tait-Bryan

$$I_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y (I_{zz}\omega_z - I_{xx}\omega_x \tan\theta) = M_x \quad (2.84)$$

$$I_{xx} \frac{d\omega_y}{dt} - \omega_x (I_{zz}\omega_z - I_{xx}\omega_x \tan\theta) = M_y \quad (2.85)$$

$$I_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} = M_z \quad (2.86)$$

<sup>a</sup> Ecuaciones 2.71 y 2.72

<sup>b</sup> Ecuación 2.67

<sup>c</sup> Ecuación 2.68

### 2.2.2 Formulación con proyección de bases

En este caso es necesario proyectar las ecuaciones sobre el sistema de referencia ligado aunque, las ecuaciones determinadas mediante la formulación anterior se simplifican empleando nuevas variables alternativas. Así pues, las ecuaciones 2.62 y 2.63 quedan de la siguiente manera:

$$\text{Ecuaciones de Newton} \quad \left. \frac{dC}{dt} \right|_1 \equiv m \left. \frac{dv}{dt} \right|_1 = F \quad (2.87)$$

$$\text{Ecuaciones de Euler} \quad \left. \frac{dL}{dt} \right|_1 \equiv \left. \frac{d(I_4 \cdot \omega_{41})}{dt} \right|_4 + \omega_{41} \times (I_4 \cdot \omega_{41}) = M \quad (2.88)$$

Esta formulación se basa en la definición de las ecuaciones de Euler mediante el vector velocidad angular proyectado sobre el sistema de referencia {4}:

$$\omega_{41} = \omega_{\bar{x}} \mathbf{i}_4 + \omega_{\bar{y}} \mathbf{j}_4 + \omega_{\bar{z}} \mathbf{k}_4 \quad (2.89)$$

utilizando como variables las componentes del vector unitario en dirección vertical del sistema de referencia {1} proyectado sobre el sistema de referencia {4}:

$$\mathbf{k}_1 = k_{\bar{x}} \mathbf{i}_4 + k_{\bar{y}} \mathbf{j}_4 + k_{\bar{z}} \mathbf{k}_4 \quad (2.90)$$

Mediante esta expresión se define la evolución de la posición y orientación del sólido sin hacer uso de las funciones trigonométricas introducidas con la formulación con *ángulos de Tait-Bryan* sino empleando como variables las componentes del vector unitario en dirección  $z_1$  proyectado en el sistema de referencia {4}. De esta manera es posible simplificar la formulación del sistema, a expensas de ser necesaria una transformación adicional para determinar la orientación del sistema de referencia {4} respecto al sistema de referencia {1}.

Al igual que con la formulación anterior, para hallar las ecuaciones de Newton únicamente es necesario definir las coordenadas de la velocidad del sólido en el sistema de referencia {1}.

Sin embargo, para hallar las ecuaciones de Euler hace falta determinar el valor de dos términos en función del momento cinético y la velocidad de rotación del sólido, expresados en el sistema de referencia {4} en este caso.

Para determinar la evolución en el sistema de referencia {4} del vector unitario en dirección vertical del sistema de referencia {1} se emplea la *fórmula de Poisson*:<sup>a</sup>

$$\left. \frac{d\mathbf{k}_1}{dt} \right|_1 = \left. \frac{d\mathbf{k}_1}{dt} \right|_4 + \omega_{41} \times \mathbf{k}_1 \quad (2.91)$$

#### Términos de las ecuaciones de Euler

La derivada del momento cinético proyectada en el sistema de referencia {4} queda:

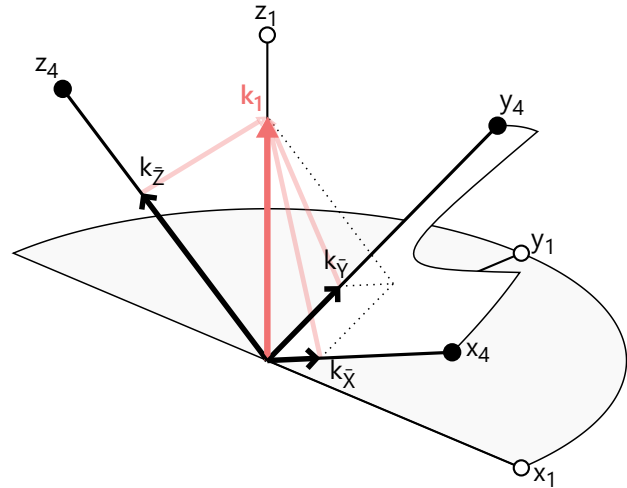
$$\left. \frac{d(I_4 \cdot \omega_{41})}{dt} \right|_4 \equiv I_4 \cdot \left. \frac{d\omega_{41}}{dt} \right|_4 = I_{\bar{x}\bar{x}} \left( \frac{d\omega_{\bar{x}}}{dt} \mathbf{i}_4 + \frac{d\omega_{\bar{y}}}{dt} \mathbf{j}_4 \right) + I_{\bar{z}\bar{z}} \frac{d\omega_{\bar{z}}}{dt} \mathbf{k}_4 \quad (2.92)$$

mientras que el producto vectorial de la velocidad angular y el momento cinético es:

$$\omega_{41} \times (I_4 \cdot \omega_{41}) = \omega_{\bar{y}} \omega_{\bar{z}} (I_{\bar{z}\bar{z}} - I_{\bar{x}\bar{x}}) \mathbf{i}_4 + \omega_{\bar{x}} \omega_{\bar{z}} (I_{\bar{x}\bar{x}} - I_{\bar{z}\bar{z}}) \mathbf{j}_4 \quad (2.93)$$

Figura 2.12 Componentes del vector  $\mathbf{k}_1^b$

<sup>b</sup> Proyecciones del vector unitario en dirección  $z$  del sistema de referencia {1} sobre el sistema de referencia {4}



<sup>a</sup> Ecuación 2.66

### Ecuaciones que definen el sistema

A partir de las ecuaciones cinemáticas se define la posición y orientación del sólido:

- **Posición:** Definición de la velocidad del sólido como la variación de la posición del mismo

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad (2.94)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \quad (2.95)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z \quad (2.96)$$

- **Orientación:** Evolución de la orientación del sólido, definida mediante la proyección de bases<sup>a</sup>

$$\frac{dk_{\bar{x}}}{dt} = \omega_{\bar{z}}k_{\bar{y}} - \omega_{\bar{y}}k_{\bar{z}} \quad (2.97)$$

$$\frac{dk_{\bar{y}}}{dt} = \omega_{\bar{x}}k_{\bar{z}} - \omega_{\bar{z}}k_{\bar{x}} \quad (2.98)$$

$$\frac{dk_{\bar{z}}}{dt} = \omega_{\bar{y}}k_{\bar{x}} - \omega_{\bar{x}}k_{\bar{y}} \quad (2.99)$$

A partir de las ecuaciones dinámicas, denominadas ecuaciones de Newton-Euler, se determina la velocidad y velocidad angular del sólido:

- **Velocidad:** Ecuaciones de Newton<sup>b</sup>

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x \quad (2.100)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = F_y \quad (2.101)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = F_z \quad (2.102)$$

- **Velocidad angular:** Ecuaciones de Euler<sup>c</sup> usando la formulación de proyección de bases

$$I_{\bar{x}\bar{x}} \frac{d\omega_{\bar{x}}}{dt} + \omega_{\bar{y}}\omega_{\bar{z}}(I_{\bar{z}\bar{z}} - I_{\bar{x}\bar{x}}) = M_x \quad (2.103)$$

$$I_{\bar{x}\bar{x}} \frac{d\omega_{\bar{y}}}{dt} - \omega_{\bar{x}}\omega_{\bar{z}}(I_{\bar{z}\bar{z}} - I_{\bar{x}\bar{x}}) = M_y \quad (2.104)$$

$$I_{\bar{z}\bar{z}} \frac{d\omega_{\bar{z}}}{dt} = M_z \quad (2.105)$$

Las ecuaciones que determinan la posición<sup>d</sup> y la velocidad<sup>e</sup> del sólido son equivalentes a las definidas mediante la formulación anterior;<sup>f</sup> mientras que, las ecuaciones que definen la orientación<sup>g</sup> y velocidad angular<sup>h</sup> del sólido depende la formulación utilizada.<sup>i</sup>

<sup>a</sup> Ecuación 4.123

<sup>b</sup> Ecuación 2.87

<sup>c</sup> Ecuación 2.88

<sup>d</sup> Ecuaciones 2.94 a 2.96

<sup>e</sup> Ecuaciones 2.100 a 2.102

<sup>f</sup> Ecuaciones 2.75 a 2.77 y 2.81 a 2.83

<sup>g</sup> Ecuaciones 2.103 a 2.105

<sup>h</sup> Ecuaciones 2.97 a 2.99

<sup>i</sup> Ecuaciones 2.78 a 2.80 y 2.84 a 2.86

### Determinación de la orientación del sólido

Para representar la orientación del sólido en el sistema de referencia {1} se define la evolución con el tiempo de dicha base respecto al sistema de referencia {4} mediante el siguiente triedro de vectores unitarios:

$$\mathbf{i}_1 = i_{\bar{X}} \mathbf{i}_4 + i_{\bar{Y}} \mathbf{j}_4 + i_{\bar{Z}} \mathbf{k}_4 \quad (2.106)$$

$$\mathbf{j}_1 = j_{\bar{X}} \mathbf{i}_4 + j_{\bar{Y}} \mathbf{j}_4 + j_{\bar{Z}} \mathbf{k}_4 \quad (2.107)$$

$$\mathbf{k}_1 = k_{\bar{X}} \mathbf{i}_4 + k_{\bar{Y}} \mathbf{j}_4 + k_{\bar{Z}} \mathbf{k}_4 \quad (2.108)$$

donde las componentes  $i_i$  y  $j_i$  son funciones de las componentes  $k_i$  con  $i = \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  que definen la orientación del sólido para cada instante de tiempo.

Para determinar la evolución de dicha base se emplea la *fórmula de Poisson*<sup>a</sup> aplicada a los vectores unitarios  $\mathbf{i}_1$  y  $\mathbf{j}_1$  de la siguiente forma:

$$0 = \left. \frac{d\mathbf{i}_1}{dt} \right|_j = \left. \frac{d\mathbf{i}_1}{dt} \right|_i + \boldsymbol{\omega}_{ij} \times \mathbf{i}_1 \quad (2.109)$$

$$0 = \left. \frac{d\mathbf{j}_1}{dt} \right|_j = \left. \frac{d\mathbf{j}_1}{dt} \right|_i + \boldsymbol{\omega}_{ij} \times \mathbf{j}_1 \quad (2.110)$$

a partir de la cual, una vez conocido el valor de las variables  $\omega_{\bar{X}}$ ,  $\omega_{\bar{Y}}$  y  $\omega_{\bar{Z}}$ , se define el siguiente sistema:

$$\frac{di_{\bar{X}}}{dt} = \omega_{\bar{Z}} i_{\bar{Y}} - \omega_{\bar{Y}} i_{\bar{Z}} \quad (2.111)$$

$$\frac{di_{\bar{Y}}}{dt} = \omega_{\bar{X}} i_{\bar{Z}} - \omega_{\bar{Z}} i_{\bar{X}} \quad (2.112)$$

$$\frac{di_{\bar{Z}}}{dt} = \omega_{\bar{Y}} i_{\bar{X}} - \omega_{\bar{X}} i_{\bar{Y}} \quad (2.113)$$

$$\frac{dj_{\bar{X}}}{dt} = \omega_{\bar{Z}} j_{\bar{Y}} - \omega_{\bar{Y}} j_{\bar{Z}} \quad (2.114)$$

$$\frac{dj_{\bar{Y}}}{dt} = \omega_{\bar{X}} j_{\bar{Z}} - \omega_{\bar{Z}} j_{\bar{X}} \quad (2.115)$$

$$\frac{dj_{\bar{Z}}}{dt} = \omega_{\bar{Y}} j_{\bar{X}} - \omega_{\bar{X}} j_{\bar{Y}} \quad (2.116)$$

Para evitar la posibilidad de que aparezcan singularidades relacionadas con que alguno de los vectores que conforman la base sean vectores nulos, según sea el valor de las componentes del vector  $\mathbf{k}_1$ , se distinguen tres casos diferentes para definir las bases en el sistema de referencia {1}:

- **Base con vector unitario  $\mathbf{i}_4$**

En caso de que el sólido tenga una orientación inicial en la que  $k_{\bar{X}}(0) = 0$ , se utilizan los siguientes vectores para determinar la base que caracteriza la orientación del vector  $\mathbf{k}_4$ :

$$\mathbf{i} = \mathbf{k}_1 \times \mathbf{i}_4 = k_{\bar{Z}} \mathbf{j}_4 - k_{\bar{Y}} \mathbf{k}_4 \quad (2.117)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{k}_1 \times (\mathbf{k}_1 \times \mathbf{i}_4) = -\left(k_{\bar{Y}}^2 + k_{\bar{Z}}^2\right) \mathbf{i}_4 + k_{\bar{X}} k_{\bar{Y}} \mathbf{j}_4 + k_{\bar{X}} k_{\bar{Z}} \mathbf{k}_4 \quad (2.118)$$

- **Base con vector unitario  $\mathbf{j}_4$**

En caso de que el sólido tenga una orientación inicial en la que  $k_{\bar{Y}}(0) = 0$ , se utilizan los siguientes vectores para determinar la base que caracteriza la orientación del vector  $\mathbf{k}_4$ :

$$\mathbf{i} = \mathbf{k}_1 \times \mathbf{j}_4 = -k_{\bar{Z}} \mathbf{i}_4 + k_{\bar{X}} \mathbf{k}_4 \quad (2.119)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{k}_1 \times (\mathbf{k}_1 \times \mathbf{j}_4) = k_{\bar{X}} k_{\bar{Y}} \mathbf{i}_4 - \left(k_{\bar{X}}^2 + k_{\bar{Z}}^2\right) \mathbf{j}_4 + k_{\bar{Y}} k_{\bar{Z}} \mathbf{k}_4 \quad (2.120)$$

- **Base con vector unitario  $\mathbf{k}_4$**

En caso de que el sólido tenga una orientación inicial en la que  $k_{\bar{Z}}(0) = 0$ , se utilizan los siguientes vectores para determinar la base que caracteriza la orientación del vector  $\mathbf{k}_4$ :

$$\mathbf{i} = \mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_4 = k_{\bar{Y}} \mathbf{i}_4 - k_{\bar{X}} \mathbf{j}_4 \quad (2.121)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{k}_1 \times (\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_4) = k_{\bar{X}} k_{\bar{Z}} \mathbf{i}_4 + k_{\bar{Y}} k_{\bar{Z}} \mathbf{j}_4 - \left(k_{\bar{X}}^2 + k_{\bar{Y}}^2\right) \mathbf{k}_4 \quad (2.122)$$

<sup>a</sup> Ecuación 2.66

Normalizando dichos vectores, el sistema de ecuaciones anterior puede reescribirse de esta forma:

- Base con vector unitario  $i_4$

$$i_1 = \frac{i}{i} = (k_Y^2 + k_Z^2)^{-1/2} (k_Z j_4 - k_Y k_4) \quad (2.123)$$

$$j_1 = \frac{j}{j} = (k_Y^2 + k_Z^2)^{-1/2} \left( - (k_Y^2 + k_Z^2) i_4 + k_X k_Y j_4 + k_X k_Z k_4 \right) \quad (2.124)$$

- Base con vector unitario  $j_4$

$$i_1 = \frac{i}{i} = (k_X^2 + k_Z^2)^{-1/2} (-k_Z i_4 + k_X k_4) \quad (2.125)$$

$$j_1 = \frac{j}{j} = (k_X^2 + k_Z^2)^{-1/2} \left( k_X k_Y i_4 - (k_X^2 + k_Z^2) j_4 + k_Y k_Z k_4 \right) \quad (2.126)$$

- Base con vector unitario  $k_4$

$$i_1 = \frac{i}{i} = (k_X^2 + k_Y^2)^{-1/2} (k_Y i_4 - k_X j_4) \quad (2.127)$$

$$j_1 = \frac{j}{j} = (k_X^2 + k_Y^2)^{-1/2} \left( k_X k_Z i_4 + k_Y k_Z j_4 - (k_X^2 + k_Y^2) k_4 \right) \quad (2.128)$$

Dado que la matriz de rotación que relaciona ambas bases vectoriales es ortogonal, para invertir la definición y expresar la base ligada en función de la base fija, simplemente es necesario trasponer dicha matriz de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} i_4 \\ j_4 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{\bar{X}} & j_{\bar{X}} & k_{\bar{X}} \\ i_{\bar{Y}} & j_{\bar{Y}} & k_{\bar{Y}} \\ i_{\bar{Z}} & j_{\bar{Z}} & k_{\bar{Z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{pmatrix} \quad (2.129)$$

Por tanto, el vector  $k_4$  – que simboliza la dirección de simetría del sólido rígido – puede expresarse en función del sistema de referencia  $\{1\}$  en el instante inicial como:

$$k_4 = i_{\bar{Z}} i_1 + j_{\bar{Z}} j_1 + k_{\bar{Z}} k_1 \quad (2.130)$$

Las componentes  $i_{\bar{Z}}$  y  $j_{\bar{Z}}$  se definen en función de  $k_{\bar{X}}$ ,  $k_{\bar{Y}}$  y  $k_{\bar{Z}}$  como sigue:<sup>a</sup>

- Base con vector unitario  $i_4$  :  $k_{\bar{X}}(0) = 0^b$

$$(i_{\bar{Z}} j_{\bar{Z}})^T = \frac{1}{\sqrt{k_Y^2 + k_Z^2}} (-k_Y \ k_X k_Z)^T \quad (2.131)$$

- Base con vector unitario  $j_4$  :  $k_{\bar{Y}}(0) = 0^c$

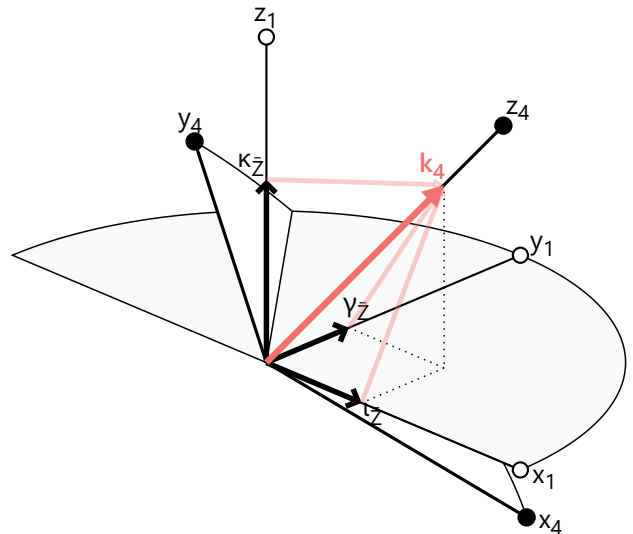
$$(i_{\bar{Z}} j_{\bar{Z}})^T = \frac{1}{\sqrt{k_X^2 + k_Z^2}} (k_X \ k_Y k_Z)^T \quad (2.132)$$

- Base con vector unitario  $k_4$  :  $k_{\bar{Z}}(0) = 0^d$

$$(i_{\bar{Z}} j_{\bar{Z}})^T = \left( 0 \ \sqrt{k_X^2 + k_Y^2} \right)^T \quad (2.133)$$

Figura 2.13 Componentes del vector  $k_4^e$

<sup>e</sup> Proyecciones del vector unitario en dirección z del sistema de referencia ligado sobre el sistema de referencia  $\{1\}$



<sup>a</sup> Ecuaciones 2.106 a 2.108

<sup>b</sup> Ecuaciones 2.123 y 2.124

<sup>c</sup> Ecuaciones 2.125 y 2.126

<sup>d</sup> Ecuaciones 2.127 y 2.128

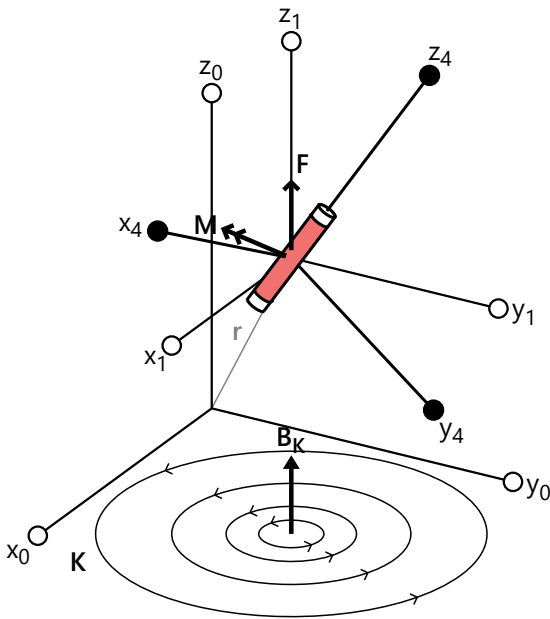


## 3 Fuerzas y pares sobre un dipolo

En este capítulo se define la expresión del campo creado por un dipolo magnético, así como las corrientes superficiales que aparecen en el plano superconductor y las condiciones de contorno que definen el sistema.

A continuación, se describe un método usado para simplificar el tratamiento de estos tipos de sistemas y, por último, se obtienen las expresiones de las fuerzas y pares generados sobre el dipolo como consecuencia de aplicar este método con el que se reemplaza el efecto del plano superconductor por otro dipolo.

### 3.1 Dipolo magnético sobre un plano superconductor



**Figura 3.1** Fuerzas y pares sobre un dipolo<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Interacción de las fuerzas  $F$  y pares  $M$  sobre un dipolo magnético, como consecuencia de las corrientes superficiales  $K$  inducidas en el plano superconductor

Reduciendo las fuerzas y momentos totales – debidos al efecto gravitatorio terrestre y magnético como consecuencia de la corriente inducida en el plano superconductor – que actúan sobre el cdm del dipolo en el sistema de referencia  $\{1\}$ , las ecuaciones dinámicas generales que definen el movimiento de este son las ecuaciones de Newton-Euler:

- Ecuaciones de Newton

$$m \frac{dv}{dt} \Big|_1 = F \quad (3.1)$$

- Ecuaciones de Euler

$$\frac{d(I_i \cdot \omega_{41})}{dt} \Big|_i + \omega_{i1} \times (I_i \cdot \omega_{41}) = M \quad (3.2)$$

donde el sistema de referencia en el que se proyectan estas ecuaciones, según la formulación a utilizar, es la siguiente:

- Ángulos de Tait-Bryan:  $i = 3$
- Proyección de bases:  $i = 4$

Las fuerzas y pares que se ejercen sobre el dipolo magnético son debidas únicamente a:

- **Gravedad (g):** Provocan una fuerza sobre el dipolo en dirección vertical descendente según el sistema de referencia {1}
- **Campo magnético (B) y corrientes inducidas (K):** El campo magnético del dipolo induce sobre el plano superconductor una corriente inducida que, a su vez, es responsable de provocar un campo magnético inducido  $\mathbf{B}_K$  que ejerce sobre el dipolo una fuerza ascendente en dirección vertical según el sistema de referencia {1} y un par sobre el mismo

A partir de la *Ley de Gauss para el campo magnético*, definida en la ecuación 1.7, se infiere que el campo magnético, en un punto del espacio  $\mathbf{r}_0$ , creado por un dipolo situado en un punto  $\mathbf{r}$  es:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3[\boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})](\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) - |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^2 \boldsymbol{\mu}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^5} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{s})\mathbf{s}}{s^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{s^3} \right) \quad \text{con } \mathbf{s} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r} \quad (3.3)$$

Por otra parte, el salto de una magnitud física al pasar de un medio a otro diferente se define como la diferencia de dicha magnitud evaluada en el extremo común a ambos medios. En particular, considerando como magnitud el campo magnético  $\mathbf{B}$ , el salto alrededor del plano superconductor se define como:

$$[\mathbf{B}] = \mathbf{B}(z = 0^+) - \mathbf{B}(z = 0^-) \quad \text{donde } \mathbf{B}(z = 0^-) = 0 \quad (3.4)$$

Considerando el efecto del plano superconductor se obtiene la siguiente condición de salto, que implica que la **componente perpendicular** a dicho plano del **campo magnético** es nula:

$$\mathbf{k}_1 \cdot [\mathbf{B}] = 0 \quad (3.5)$$

Usando *Ley de Ampère* mostrada en la ecuación 1.8 se obtiene la siguiente condición de salto:

$$\mathbf{k}_1 \times [\mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3.6)$$

a partir de lo cual es posible obtener una expresión de la densidad superficial de corriente  $\mathbf{K}$  inducida en el plano de espesor  $\delta$ , teniendo en cuenta la expresión del campo magnético de la ecuación 3.3:

$$\mathbf{K} = \frac{\delta}{\mu_0} (\mathbf{k}_1 \times [\mathbf{B}]) = \frac{\delta \mathbf{k}_1}{4\pi} \times \left( \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{s})\mathbf{s}}{s^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{s^3} \right) \quad \text{donde } \mathbf{K} = \delta \mathbf{J} \quad (3.7)$$

Una manera sencilla de determinar la fuerza y el par que se ejerce sobre el dipolo debido al efecto del plano superconductor, producto de las corrientes inducidas sobre dicho plano, es usar el método de las imágenes.



## 3.2 Método de las imágenes

La base matemática del método de las imágenes es la aplicación del teorema de existencia y unicidad de la ecuación de Laplace, el cual establece que si existe una función que verifique la ecuación y las condiciones de contorno del problema, esta función es la solución.<sup>[9]</sup>

El campo magnético  $\mathbf{B}$  creado por un dipolo con posición respecto al sistema de fijo  $\{0\}$ :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_0 + y\mathbf{j}_0 + z\mathbf{k}_0 \quad (3.8)$$

genera una corriente inducida  $\mathbf{K}$  sobre el plano superconductor que produce, a su vez, un campo magnético  $\mathbf{B}_K$  que interacciona con el dipolo provocando su repulsión. Haciendo uso del método de las imágenes es posible simplificar dicho sistema, reemplazando el efecto del plano superconductor en la distribución original por un dipolo ficticio considerado como fijo e independiente del real con posición:

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}_0 + y'\mathbf{j}_0 + z'\mathbf{k}_0 \quad (3.9)$$

que replica las condiciones de contorno del problema, creando otro equivalente más sencillo cuya solución coincide con la del problema original.

### Dipolo magnético horizontal: Paralelo al plano superconductor

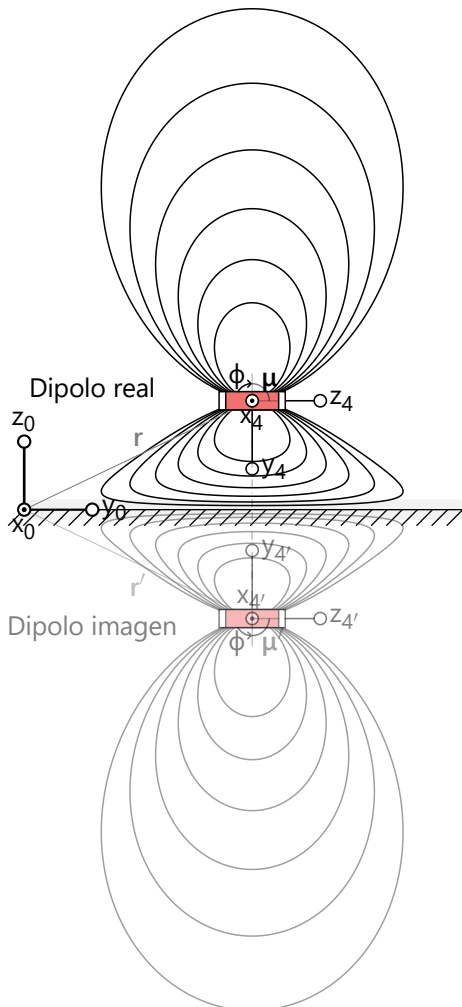


Figura 3.2 Dipolo horizontal<sup>a</sup>

En el caso de que el dipolo magnético se oriente de manera paralela al plano superconductor, definido por:

- Ángulos de Euler<sup>b</sup>  $\phi = \pi/2$  o  $\theta = \pi/2$
- Proyección de bases<sup>c</sup>  $k_{\bar{x}} = 1$  o  $k_{\bar{y}} = 1$

el momento dipolar magnético que lo caracteriza carece de componente vertical expresado en el sistema de referencia  $\{1\}$ , es decir:

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_x \mathbf{i}_1 + \mu_y \mathbf{j}_1 \quad (3.10)$$

Y el momento dipolar magnético del dipolo imagen es:

$$\boldsymbol{\mu}' = \mu_x \mathbf{i}_1 + \mu_y \mathbf{j}_1 \quad (3.11)$$

En ausencia de perturbaciones externas, el dipolo con esta orientación se encuentra en una posición de equilibrio.

De manera general, tanto para este escenario como para los siguientes, las líneas de campo generadas por el dipolo magnético se deforman en la proximidad del plano superconductor indicando una mayor intensidad del campo magnético en dicha región – debido a la presencia del dipolo imagen situado de manera simétrica al anterior respecto al plano horizontal – de manera que no lo penetran, exhibiendo que la componente vertical del campo magnético en dicha región ( $z = 0$ ) es nula, como se demostrará analíticamente en secciones posteriores.

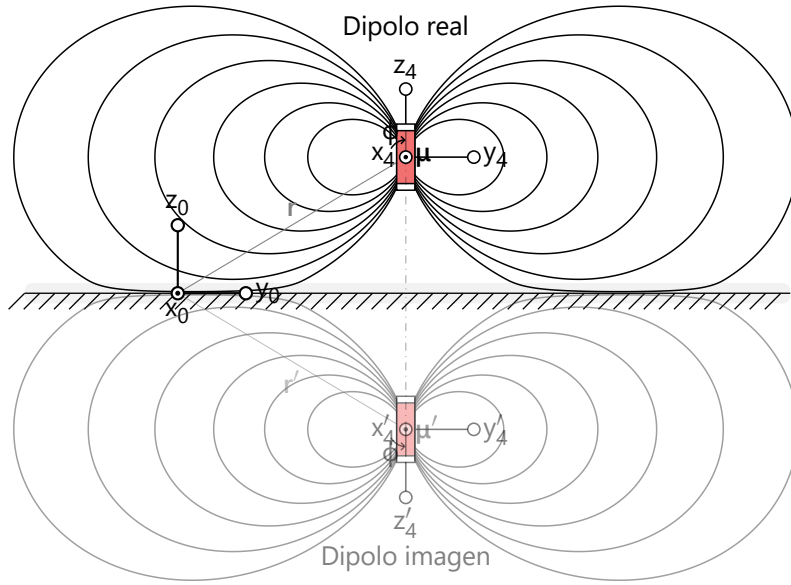
La definición del dipolo imaginario facilita la caracterización del sistema a resolver, pero es necesario tener en consideración que cualquier resultado obtenido aplicado en la región del espacio definido por debajo del plano superconductor ( $z < 0$ ) carece de validez alguna.

<sup>a</sup> Representación del dipolo magnético paralelo al plano superconductor (real e imagen) y líneas de campo que generan

<sup>b</sup> Secciones 2.1.2.3 y 2.2.1

<sup>c</sup> Sección 2.2.2

## Dipolo magnético vertical: Perpendicular al plano superconductor

Figura 3.3 Dipolo vertical<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Representación del dipolo magnético perpendicular al plano superconductor (real e imagen) y líneas de campo que generan

En caso de que el dipolo magnético se oriente de manera perpendicular al plano superconductor (que supone también una posición de equilibrio), definido por:

- Ángulos de Euler<sup>b</sup>

$$\phi = \theta = 0$$

- Proyección de bases<sup>c</sup>

$$k_z = 0$$

el momento dipolar magnético que lo define en el sistema de referencia {1} es:

$$\mu = \mu_z k_1 \quad (3.12)$$

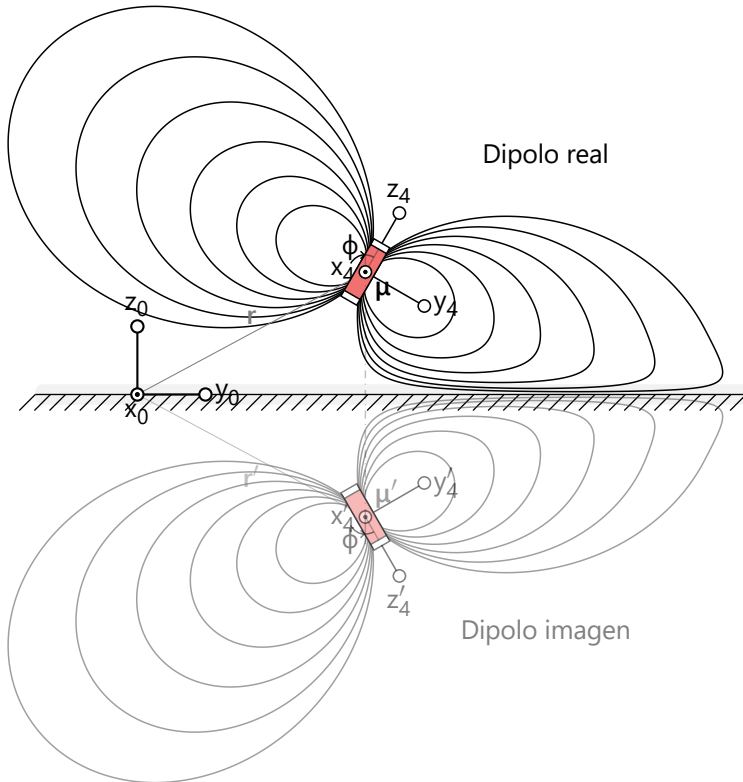
y el momento dipolar magnético del dipolo imagen es:

$$\mu' = -\mu_z k_1 \quad (3.13)$$

<sup>b</sup> Definido en las secciones 2.1.2.3 y 2.2.1

<sup>c</sup> Definido en la sección 2.2.2

## Dipolo magnético oblicuo: Suma de los casos anteriores

Figura 3.4 Dipolo oblicuo<sup>b</sup>

<sup>b</sup> Representación del dipolo magnético oblicuo respecto al plano superconductor (real e imagen) y líneas de campo que generan

En el caso general no existen posiciones de equilibrio.

El dipolo adquiere una orientación arbitraria, que variará en el tiempo puesto que una parte de este se encuentra más cercano al plano superconductor – donde las líneas de campo están más cercanas entre sí, indicando una mayor intensidad del campo magnético – y por tanto, sometido a una fuerza magnética mayor que la fracción restante, lo que provoca una traslación y rotación del mismo.

La expresión general del momento dipolar magnético en el sistema de referencia {1} es una combinación lineal de las expresiones 3.10 y 3.12:

$$\mu = \mu_x i_1 + \mu_y j_1 + \mu_z k_1 \quad (3.14)$$

siendo el momento dipolar magnético del dipolo imagen una combinación lineal de las expresiones 3.11 y 3.13:

$$\mu' = \mu_x i_1 + \mu_y j_1 - \mu_z k_1 \quad (3.15)$$

### 3.3 Fuerzas y pares entre dos dipolos

Particularizando las expresiones 3.14 y 3.15 en el sistema de referencia {1}, el momento dipolar magnético del dipolo imagen se puede expresar en función del momento dipolar magnético del dipolo real de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \mu_x \mathbf{i}_1 + \mu_y \mathbf{j}_1 + \mu_z \mathbf{k}_1 \\ \mu' &= \mu_x \mathbf{i}_1 + \mu_y \mathbf{j}_1 - \mu_z \mathbf{k}_1 \end{aligned} \right\} \mu' = \mu - 2(\mu \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1 \quad (3.16)$$

En la figura 3.5 se muestra esquemáticamente un dipolo magnético definido físicamente por su momento dipolar  $\mu$  y gráficamente por un vector apuntando hacia el polo (+), con su cdm situado en una posición:

$$\mathbf{r} = (x \ y \ z)^T \quad (3.17)$$

así como la imagen de este, definido físicamente por un momento dipolar magnético  $\mu'$  y gráficamente por un vector apuntando hacia el polo (+), simétrico al dipolo real respecto al plano  $x_0y_0$ , de modo que su cdm se encuentra situado en una posición:

$$\mathbf{r}' = (x' \ y' \ z')^T \quad (3.18)$$

respecto al sistema de referencia fijo {0}, sobre el que se ha representado su proyección, y que están relacionados como sigue:

$$x' = x \quad (3.19)$$

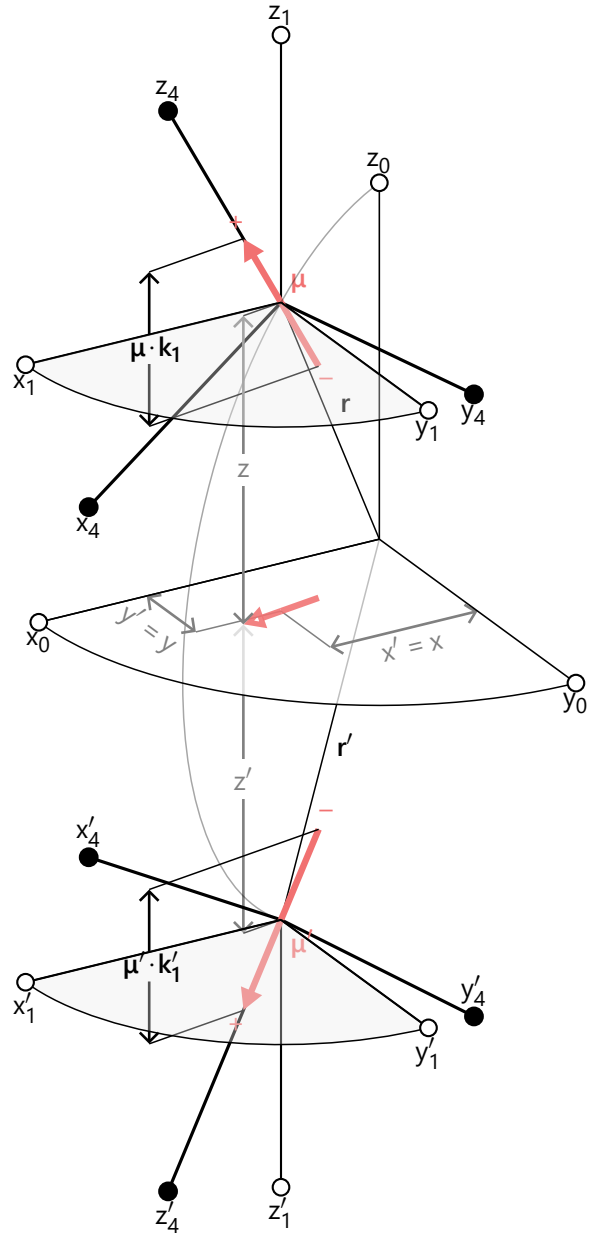
$$y' = y \quad (3.20)$$

$$z' = -z \quad (3.21)$$

Por otra parte, en la la expresión 3.16 se puede ver cómo el momento dipolar magnético del dipolo imagen se define en función del momento dipolar magnético del dipolo real, de forma que la proyección del momento dipolar magnético del dipolo imagen  $\mu'$  en la dirección  $\mathbf{k}'_1$  – vector unitario en la dirección  $z'_1$  – es equivalente a la proyección del momento dipolar magnético del dipolo real  $\mu$  en la dirección  $\mathbf{k}_1$  dado que la posición y orientación del dipolo imagen es simétrica respecto al plano  $x_0y_0$  por construcción y definición de acuerdo con al método de las imágenes.

De este modo, de acuerdo a las ecuaciones 3.19 a 3.21, la posición relativa entre el dipolo real y el dipolo imagen se expresa en términos del sistema de referencia {1} así:

$$\mathbf{s}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = 2z \mathbf{k}_1 \quad (3.22)$$



**Figura 3.5** Relación entre el dipolo real e imagen<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Dipolo definido por su momento dipolar magnético  $\mu$ , orientado hacia el polo (+) y su imagen

El campo magnético creado por el dipolo imagen, situado en una posición  $\mathbf{r}'$ , sobre un punto del espacio caracterizado por un vector  $\mathbf{r}_0$  es:

$$\mathbf{B}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3[\mu' \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}')] (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}') - |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|^2 \mu'}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|^5} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mu' \cdot \mathbf{s}') \mathbf{s}'}{s'^5} - \frac{\mu'}{s'^3} \right) \quad \text{con} \quad \mathbf{s}' = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}' \quad (3.23)$$

En concreto, el campo magnético generado por el dipolo imagen evaluado en la posición del dipolo real definido por el vector  $\mathbf{r}$ , usado para determinar la fuerza y el par magnético ejercidos, es:

$$\mathbf{B}'_{\mu} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3 [\boldsymbol{\mu}' \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')] (\mathbf{r}-\mathbf{r}') - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 \boldsymbol{\mu}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3 (\boldsymbol{\mu}' \cdot \mathbf{s}') \mathbf{s}'}{s'^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}'}{s'^3} \right) \quad \text{con } \mathbf{s}' = \mathbf{r}-\mathbf{r}' \quad (3.24)$$

### Determinación de la fuerza magnética ejercida sobre el dipolo

La fuerza ejercida por el dipolo imagen sobre el dipolo real se define en función de la interacción magnética entre ambos:<sup>[40]</sup>

$$\mathbf{F}_{\mathbf{B}'_{\mu}} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \{ \mathbf{B}'_{\mu} \} \quad (3.25)$$

que puede reescribirse de la siguiente manera, aplicando el gradiente por partes a la definición del campo magnético de la ecuación 3.24:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{B}'_{\mu}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3 (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \{ \boldsymbol{\mu}' \cdot \mathbf{s}' \} \mathbf{s}' + 3 (\boldsymbol{\mu}' \cdot \mathbf{s}') (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \{ \mathbf{s}' \}}{s'^5} - \frac{3 (\boldsymbol{\mu}' \cdot \mathbf{s}') \mathbf{s}' (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \{ s'^5 \}}{s'^{10}} + \frac{\boldsymbol{\mu}' (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \{ s'^3 \}}{s'^6} \right) \quad (3.26)$$

cuyos términos desarrollados son:

$$(\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \{ \boldsymbol{\mu}' \cdot \mathbf{s}' \} = \boldsymbol{\mu}' \left( \mu_x \frac{\partial}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial}{\partial z} \right) ((x-x')\mathbf{i}_1 + (y-y')\mathbf{j}_1 + (z-z')\mathbf{k}_1) = \boldsymbol{\mu}' \cdot \boldsymbol{\mu} \quad (3.27)$$

$$(\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \{ \mathbf{s}' \} = \left( \mu_x \frac{\partial}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial}{\partial z} \right) ((x-x')\mathbf{i}_1 + (y-y')\mathbf{j}_1 + (z-z')\mathbf{k}_1) = \boldsymbol{\mu} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \{ s'^n \} &= \left( \mu_x \frac{\partial}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial}{\partial z} \right) ((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{n/2} = \\ &= n \left( (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{\frac{n-2}{2}} (\mu_x(x-x') + \mu_y(y-y') + \mu_z(z-z')) = n s'^{n-2} \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{s}' \end{aligned} \quad (3.29)$$

De forma que, la expresión de la fuerza magnética queda como:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{B}'_{\mu}} = \frac{3\mu_0}{4\pi} \left( \frac{(\boldsymbol{\mu}' \cdot \boldsymbol{\mu}) \mathbf{s}'}{s'^5} + \frac{(\boldsymbol{\mu}' \cdot \mathbf{s}') \boldsymbol{\mu}}{s'^5} + \frac{(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{s}') \boldsymbol{\mu}'}{s'^5} - \frac{5 (\boldsymbol{\mu}' \cdot \mathbf{s}') (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{s}') \mathbf{s}'}{s'^7} \right) \quad (3.30)$$

### Determinación del par magnético ejercido sobre el dipolo

Por otra parte, el par ejercido por el dipolo imagen sobre el dipolo real se define como:<sup>[40]</sup>

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B}'_{\mu}} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}'_{\mu} \quad (3.31)$$

Desarrollando las componentes de la ecuación 3.24 y teniendo en cuenta la ecuación 3.22, se obtiene que la expresión del campo magnético generado por el dipolo imagen, evaluado en la posición del dipolo real es:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3 (\boldsymbol{\mu}' \cdot \mathbf{s}') \mathbf{s}'}{s'^5} &= \frac{3 (-2z \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{k}_1) 2z \mathbf{k}_1}{32z^5} \\ \frac{\boldsymbol{\mu}'}{s'^3} &= \frac{\boldsymbol{\mu} - 2 (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1}{8z^3} \end{aligned} \right\} \quad \mathbf{B}'_{\mu} = -\frac{\mu_0}{32\pi z^3} ((\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1 + \boldsymbol{\mu}) \quad (3.32)$$

De modo que, la expresión del par magnético queda como:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B}'_{\mu}} = \frac{\mu_0}{32\pi z^3} [((\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1 + \boldsymbol{\mu}) \times \boldsymbol{\mu}] \quad (3.33)$$

## 4 Ecuaciones de movimiento

En este capítulo se describen las ecuaciones de movimiento del sistema, definidas mediante dos formulaciones diferentes:

- Ángulos de Tait-Bryan  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$  alrededor de los ejes  $x_1$ ,  $y_2$  y  $z_3$ , respectivamente
- Proyecciones  $k_{\bar{x}}$ ,  $k_{\bar{y}}$  y  $k_{\bar{z}}$  del vector  $\mathbf{k}_1$  sobre el sistema de referencia ligado al sólido

Tras definir el conjunto de ecuaciones, se adimensionalizan para obtener un sistema que no dependa de ninguna de las dimensiones de las variables que lo forman.

Por último, se determinan algunas constantes del movimiento, es decir, ciertos parámetros que permanecen invariables durante la evolución del sistema.

Considerando todas las fuerzas y pares que interaccionan con el sistema, las ecuaciones 2.62 y 2.63 que definen la evolución de este se reescriben de la siguiente manera:

$$\text{Cantidad de movimiento} \quad \left. \frac{d\mathbf{C}}{dt} \right|_1 \equiv m \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_1 = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{B'_\mu} \quad (4.1)$$

$$\text{Momento cinético} \quad \left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_1 \equiv \left. \frac{d(\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_{41})}{dt} \right|_i + \boldsymbol{\omega}_{i1} \times (\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_{41}) = \mathbf{M}_{B'_\mu} \quad \text{con } i = \{3,4\} \quad (4.2)$$

Teniendo en cuenta que la fuerza gravitatoria únicamente tiene componente en dirección vertical:

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g} \quad (4.3)$$

la definición de las ecuaciones de la expresión 4.1, en el sistema de referencia {1}, es única:

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x \quad \text{donde } v_x = \frac{dx}{dt} \quad (4.4)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = F_y \quad \text{donde } v_y = \frac{dy}{dt} \quad (4.5)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = -mg + F_z \quad \text{donde } v_z = \frac{dz}{dt} \quad (4.6)$$

Sin embargo, la definición de las ecuaciones de la expresión 4.2 depende de la formulación a utilizar:

- Ángulos de Tait-Bryan ( $i = 3$ )

$$I_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y (I_{zz}\omega_z - I_{xx}\omega_x \tan\theta) = M_x \quad (4.7)$$

$$I_{xx} \frac{d\omega_y}{dt} - \omega_x (I_{zz}\omega_z - I_{xx}\omega_x \tan\theta) = M_y \quad (4.8)$$

$$I_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} = M_z \quad (4.9)$$

- Proyección de bases ( $i = 4$ )

$$I_{\bar{x}\bar{x}} \frac{d\omega_{\bar{x}}}{dt} + \omega_{\bar{y}}\omega_{\bar{z}} (I_{\bar{z}\bar{z}} - I_{\bar{x}\bar{x}}) = M_x \quad (4.10)$$

$$I_{\bar{x}\bar{x}} \frac{d\omega_{\bar{y}}}{dt} - \omega_{\bar{x}}\omega_{\bar{z}} (I_{\bar{z}\bar{z}} - I_{\bar{x}\bar{x}}) = M_y \quad (4.11)$$

$$I_{\bar{z}\bar{z}} \frac{d\omega_{\bar{z}}}{dt} = M_z \quad (4.12)$$

## 4.1 Formulación con ángulos de Tait-Bryan

Las ecuaciones 4.1 y 4.2, con esta formulación, quedan de la siguiente manera:

$$\text{Ecuaciones de Newton} \quad m \frac{dv}{dt} \Big|_1 = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{B'_\mu} \quad (4.13)$$

$$\text{Ecuaciones de Euler} \quad \frac{d(I_3 \cdot \omega_{41})}{dt} \Big|_3 + \omega_{31} \times (I_3 \cdot \omega_{41}) = \mathbf{M}_{B'_\mu} \quad (4.14)$$

El momento dipolar magnético en el sistema de referencia {3} en el que se formula estas ecuaciones se define como:

$$\boldsymbol{\mu} = \mu \mathbf{k}_3 \quad (4.15)$$

mientras que el momento dipolar magnético del dipolo imagen se relaciona con el valor del dipolo real, según la expresión 3.16, de forma que con esta formulación queda:

$$\boldsymbol{\mu}' = \mu \mathbf{k}_3 - 2\mu \cos \phi \cos \theta \mathbf{k}_1 \quad (4.16)$$

Definidas las ecuaciones que determinan la evolución del sistema en la sección 2.2.1, a continuación es necesario únicamente determinar el valor de las fuerzas y pares magnéticos ejercidos sobre el dipolo usando esta formulación.

### Determinación de la fuerza magnética ejercida sobre el dipolo usando ángulos de Tait-Bryan

Desarrollando cada uno de los términos que componen la ecuación 3.30, teniendo en cuenta la posición relativa entre el dipolo real e imagen definida en la ecuación 3.22:

$$\frac{(\boldsymbol{\mu}' \cdot \boldsymbol{\mu}) \mathbf{s}'}{s^5} = \frac{(\mu^2 - 2\mu^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta) 2z \mathbf{k}_1}{32z^5} = \frac{\mu^2}{16z^4} (1 - 2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta) \mathbf{k}_1 \quad (4.17)$$

$$\frac{(\boldsymbol{\mu}' \cdot \mathbf{s}') \boldsymbol{\mu}}{s^5} = \frac{(-2\mu z \cos \phi \cos \theta) \mu \mathbf{k}_3}{32z^5} = -\frac{\mu^2}{16z^4} \cos \phi \cos \theta \mathbf{k}_3 \quad (4.18)$$

$$\frac{(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{s}') \boldsymbol{\mu}'}{s^5} = \frac{2\mu z \cos \phi \cos \theta (\mu \mathbf{k}_3 - 2\mu \cos \phi \cos \theta \mathbf{k}_1)}{32z^5} = \frac{\mu^2}{16z^4} \cos \phi \cos \theta (\mathbf{k}_3 - 2 \cos \phi \cos \theta \mathbf{k}_1) \quad (4.19)$$

$$\frac{5(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{s}') (\boldsymbol{\mu}' \cdot \mathbf{s}') \mathbf{s}'}{s^7} = \frac{10\mu z \cos \phi \cos \theta (-2\mu z \cos \phi \cos \theta) 2z \mathbf{k}_1}{128z^7} = -\frac{5\mu^2}{16z^4} \cos^2 \phi \cos^2 \theta \mathbf{k}_1 \quad (4.20)$$

se llega a la siguiente expresión de la fuerza generada por el dipolo imagen sobre el dipolo real:

$$\mathbf{F}_{B'_\mu} = \frac{3\mu_0 \mu^2}{64\pi z^4} (1 + \cos^2 \phi \cos^2 \theta) \mathbf{k}_1 \quad (4.21)$$

### Determinación del par magnético ejercido sobre el dipolo usando ángulos de Tait-Bryan

Teniendo en cuenta que el vector unitario en dirección z en el sistema de referencia {1} se puede expresar en función del sistema de referencia {3} según la ecuación 2.38, el principal término que conforma la ecuación 3.33 es:

$$(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1 + \boldsymbol{\mu} = \mu [\cos \phi \cos \theta (-\cos \phi \cos \theta \mathbf{i}_3 + \sin \phi \mathbf{j}_3) + (1 + \cos \phi \cos \theta \mathbf{k}_3)] \quad (4.22)$$

de forma que el par generado por el dipolo imagen sobre el dipolo real es, por tanto:

$$\mathbf{M}_{B'_\mu} = \frac{\mu_0 \mu^2}{32\pi z^3} \cos \phi \cos \theta (\sin \phi \mathbf{i}_3 + \cos \phi \sin \theta \mathbf{j}_3) \quad (4.23)$$

#### 4.1.1 Sistema de ecuaciones

El conjunto de ecuaciones que definen el problema como sistema de primer orden es:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad (4.24)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \quad (4.25)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z \quad (4.26)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad (4.27)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = 0 \quad (4.28)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g + \frac{3\mu_0\mu^2}{64\pi m z^4} (1 + \cos^2 \phi \cos^2 \theta) \quad (4.29)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega_x}{\cos \theta} \quad (4.30)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_y \quad (4.31)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_z - \omega_x \tan \theta \quad (4.32)$$

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \omega_y \left( \omega_x \tan \theta - \frac{I_{zz}}{I_{xx}} \omega_z \right) + \frac{\mu_0\mu^2}{32\pi I_{xx} z^3} \sin \phi \cos \phi \cos \theta \quad (4.33)$$

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \omega_x \left( \frac{I_{zz}}{I_{xx}} \omega_z - \omega_x \tan \theta \right) + \frac{\mu_0\mu^2}{32\pi I_{xx} z^3} \cos^2 \phi \sin \theta \cos \theta \quad (4.34)$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = 0 \quad (4.35)$$

A partir de las ecuaciones 4.27, 4.28 y 4.35 se obtiene que la velocidad en el plano xy, respecto al sistema de referencia {1}, se mantiene constante; así como la velocidad de giro alrededor del eje z, en el sistema de referencia {3}, denominada como:

$$\omega_z = \omega \quad (4.36)$$

#### Sistema de ecuaciones de relevancia

$$\frac{dz}{dt} = v_z \quad (4.37)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g + \frac{3\mu_0\mu^2}{64\pi m z^4} (1 + \cos^2 \phi \cos^2 \theta) \quad (4.38)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega_x}{\cos \theta} \quad (4.39)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_y \quad (4.40)$$

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \omega_y \left( \omega_x \tan \theta - \frac{I_{zz}}{I_{xx}} \omega \right) + \frac{\mu_0\mu^2}{32\pi I_{xx} z^3} \sin \phi \cos \phi \cos \theta \quad (4.41)$$

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \omega_x \left( \frac{I_{zz}}{I_{xx}} \omega - \omega_x \tan \theta \right) + \frac{\mu_0\mu^2}{32\pi I_{xx} z^3} \cos^2 \phi \sin \theta \cos \theta \quad (4.42)$$

## 4.1.2 Adimensionalización de las ecuaciones

Definiendo la posición de equilibrio  $z_0$  como la posición en dirección  $z$  del dipolo magnético con orientación inicial horizontal definido por un ángulo  $\phi$  y/o  $\theta$  igual a  $\frac{\pi}{2}$  en el sistema de referencia  $\{1\}$ , y el tiempo de referencia  $t_0$  como una magnitud derivada de esta; se usan como referencia para adimensionalizar el sistema de ecuaciones anterior de la siguiente forma:

$$z_0 = \sqrt[4]{\frac{3\mu_0\mu^2}{64\pi mg}} \quad (4.43)$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{z_0}{g}} = \sqrt[8]{\frac{3\mu_0\mu^2}{64\pi mg^9}} \quad (4.44)$$

## Análisis dimensional de variables

Tiempo  $[t] = T$

Posición  $[r] = L$

Velocidad  $\left[\frac{dr}{dt}\right] = LT^{-1}$

$[v] = LT^{-1}$

Aceleración  $\left[\frac{dv}{dt}\right] = LT^{-2}$

Orientación  $[\theta] = 1$

Velocidad angular  $\left[\frac{d\theta}{dt}\right] = T^{-1}$

$[\omega] = T^{-1}$

Aceleración angular  $\left[\frac{d\omega}{dt}\right] = T^{-2}$

## Adimensionalización usando variables de referencia

$\tau = \frac{t}{t_0}$

$(\xi \eta \zeta)^T = \frac{1}{z_0} (x y z)^T$

$\frac{d}{dt}(\xi \eta \zeta)^T = \frac{t_0}{z_0} \frac{d}{dt}(x y z)^T \equiv \frac{1}{\sqrt{gz_0}} \frac{d}{dt}(x y z)^T$

$(v_x v_y v_z)^T = \frac{t_0}{z_0} (v_x v_y v_z)^T \equiv \frac{1}{\sqrt{gz_0}} (v_x v_y v_z)^T$

$\frac{d}{dt}(v_x v_y v_z)^T = \frac{t_0^2}{z_0} \frac{d}{dt}(v_x v_y v_z)^T \equiv \frac{1}{g} \frac{d}{dt}(v_x v_y v_z)^T$

$(\phi \vartheta \psi)^T = (\phi \theta \psi)^T$

$\frac{d}{dt}(\phi \vartheta \psi)^T = t_0 \frac{d}{dt}(\phi \theta \psi)^T \equiv \sqrt{\frac{z_0}{g}} \frac{d}{dt}(\phi \theta \psi)^T$

$(\omega_x \omega_y \omega_z)^T = t_0 (\omega_x \omega_y \omega_z)^T \equiv \sqrt{\frac{z_0}{g}} (\omega_x \omega_y \omega_z)^T$

$\frac{d}{dt}(\omega_x \omega_y \omega_z)^T = t_0^2 \frac{d}{dt}(\omega_x \omega_y \omega_z)^T \equiv \frac{z_0}{g} \frac{d}{dt}(\omega_x \omega_y \omega_z)^T$

Las ecuaciones 4.24 a 4.35 se pueden adimensionalizar introduciendo los siguientes parámetros:

- **Parámetro geométrico:** Define una relación entre el momento de inercia alrededor del eje  $z$  respecto al momento de inercia alrededor del eje  $x$ , en el sistema de referencia  $\{3\}$ . Se trata de un parámetro puramente geométrico puesto que únicamente depende del valor de las componentes del tensor de inercia del dipolo:

$$\lambda = \frac{I_{zz}}{I_{xx}} \quad (4.45)$$

Dependiendo del valor de este parámetro, el dipolo adquiere diversas geometrías:

- **Geometría de varilla:**  $\lambda = 0$  Inercia alrededor de eje  $Z$  despreciable
- **Geometría de esfera:**  $\lambda = 1$  Inercia equivalente alrededor de cualquier eje
- **Geometría de disco:**  $\lambda = 2$  Inercia alrededor de eje  $Z$  doble que alrededor de otros ejes
- **Parámetro magnético:** Define una relación entre el producto de la masa y el cuadrado del valor de la posición de equilibrio  $z_0$ , respecto del momento de inercia alrededor del eje  $x$  en el sistema de referencia  $\{3\}$ . De esta forma, es un parámetro que depende tanto de la masa como de la intensidad del dipolo:

$$\beta = \frac{mz_0^2}{I_{xx}} \quad \text{donde} \quad z_0 = z_0(m, \mu) \quad (4.46)$$

Luego, teniendo en consideración la expresión 4.43, este parámetro cumple la siguiente relación:

$$\beta \propto \sqrt{m\mu} \quad (4.47)$$

es decir, es más sensible a variaciones del valor de  $\mu$  que de la masa del dipolo.



### 4.1.3 Sistema de ecuaciones adimensionales

El conjunto de ecuaciones adimensionales que definen el problema como sistema de primer orden es:

$$\frac{d\xi}{dt} = v_x \quad (4.48)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = v_y \quad (4.49)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = v_z \quad (4.50)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad (4.51)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = 0 \quad (4.52)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -1 + \frac{1}{\zeta^4} (1 + \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta) \quad (4.53)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varpi_X}{\cos \vartheta} \quad (4.54)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \varpi_Y \quad (4.55)$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = \varpi_Z - \varpi_X \tan \vartheta \quad (4.56)$$

$$\frac{d\varpi_X}{dt} = \varpi_Y (\varpi_X \tan \vartheta - \lambda \varpi_Z) + \frac{2\beta}{3\zeta^3} \sin \varphi \cos \varphi \cos \vartheta \quad (4.57)$$

$$\frac{d\varpi_Y}{dt} = \varpi_X (\lambda \varpi_Z - \varpi_X \tan \vartheta) + \frac{2\beta}{3\zeta^3} \cos^2 \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta \quad (4.58)$$

$$\frac{d\varpi_Z}{dt} = 0 \quad (4.59)$$

A partir de las ecuaciones 4.51, 4.52 y 4.59 se obtiene que la velocidad adimensional en el plano xy, respecto al sistema de referencia {1}, se mantiene constante; así como la velocidad adimensional de giro alrededor del eje z, en el sistema de referencia {3}, denominada como:

$$\varpi_Z = \Omega \quad (4.60)$$

#### Sistema de ecuaciones adimensionales de relevancia

$$\frac{d\zeta}{dt} = v_z \quad (4.61)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -1 + \frac{1}{\zeta^4} (1 + \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta) \quad (4.62)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varpi_X}{\cos \vartheta} \quad (4.63)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \varpi_Y \quad (4.64)$$

$$\frac{d\varpi_X}{dt} = \varpi_Y (\varpi_X \tan \vartheta - \lambda \Omega) + \frac{2\beta}{3\zeta^3} \sin \varphi \cos \varphi \cos \vartheta \quad (4.65)$$

$$\frac{d\varpi_Y}{dt} = \varpi_X (\lambda \Omega - \varpi_X \tan \vartheta) + \frac{2\beta}{3\zeta^3} \cos^2 \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta \quad (4.66)$$

## 4.2 Formulación con proyección de bases

Las ecuaciones 4.1 y 4.2, con esta formulación, quedan de la siguiente manera:

$$\text{Ecuaciones de Newton} \quad m \frac{dv}{dt} \Big|_1 = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{B'_\mu} \quad (4.67)$$

$$\text{Ecuaciones de Euler} \quad \frac{d(\mathbf{I}_4 \cdot \boldsymbol{\omega}_{41})}{dt} \Big|_4 + \boldsymbol{\omega}_{41} \times (\mathbf{I}_4 \cdot \boldsymbol{\omega}_{41}) = \mathbf{M}_{B'_\mu} \quad (4.68)$$

El momento dipolar magnético en el sistema de referencia ligado en el que se formula estas ecuaciones se define como:

$$\boldsymbol{\mu} = \mu \mathbf{k}_4 \quad (4.69)$$

mientras que el momento dipolar magnético del dipolo imagen se relaciona con el valor del dipolo real, según la expresión 3.16, de forma que con esta formulación queda:

$$\boldsymbol{\mu}' = \mu \mathbf{k}_4 - 2\mu k_z \mathbf{k}_1 \quad (4.70)$$

Definidas las ecuaciones que determinan la evolución del sistema en la sección 2.2.2, a continuación es necesario únicamente determinar el valor de las fuerzas y pares magnéticos ejercidos sobre el dipolo usando esta formulación.

### Determinación de la fuerza magnética ejercida sobre el dipolo usando proyección de bases

Considerando la posición relativa entre los dipolos dada en la ecuación 3.22, los términos que forman la expresión de la fuerza introducida en la ecuación 3.30, se reescriben de la siguiente manera:

$$\frac{(\boldsymbol{\mu}' \cdot \boldsymbol{\mu}) \mathbf{s}'}{s'^5} = \frac{(\mu^2 - 2\mu^2 k_z^2) 2z \mathbf{k}_1}{32z^5} = \frac{\mu^2}{16z^4} (1 - 2k_z^2) \mathbf{k}_1 \quad (4.71)$$

$$\frac{(\boldsymbol{\mu}' \cdot \mathbf{s}') \boldsymbol{\mu}}{s'^5} = \frac{(-2z\mu k_z) \mu \mathbf{k}_4}{32z^5} = -\frac{\mu^2}{16z^4} k_z \mathbf{k}_4 \quad (4.72)$$

$$\frac{(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{s}') \boldsymbol{\mu}'}{s'^5} = \frac{2z\mu k_z (\mu \mathbf{k}_4 - 2\mu k_z \mathbf{k}_1)}{32z^5} = \frac{\mu^2}{16z^4} (k_z \mathbf{k}_4 - 2k_z^2 \mathbf{k}_1) \quad (4.73)$$

$$\frac{5(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{s}') (\boldsymbol{\mu}' \cdot \mathbf{s}') \mathbf{s}'}{s'^7} = \frac{10z\mu k_z (-2z\mu k_z) 2z \mathbf{k}_1}{128z^7} = -\frac{5\mu^2}{16z^4} k_z^2 \mathbf{k}_1 \quad (4.74)$$

de forma que la expresión de la fuerza generada por el dipolo imagen sobre el dipolo real es:

$$\mathbf{F}_{B'_\mu} = \frac{3\mu_0 \mu^2}{64\pi z^4} (1 + k_z^2) \mathbf{k}_1 \quad (4.75)$$

### Determinación del par magnético ejercido sobre el dipolo usando proyección de bases

Teniendo en cuenta que el vector unitario en dirección z en el sistema de referencia {1} se puede expresar en función del sistema de referencia {4} mediante las coordenadas definidas en la expresión 2.90, el principal término que conforma la ecuación 3.33 es:

$$(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1 + \boldsymbol{\mu} = \mu \left[ k_z (k_x \mathbf{i}_4 + k_y \mathbf{j}_4) + (1 + k_z^2) \mathbf{k}_4 \right] \quad (4.76)$$

de forma que el par generado por el dipolo imagen sobre el dipolo real es:

$$\mathbf{M}_{B'_\mu} = \frac{\mu_0 \mu^2}{32\pi z^3} k_z (k_y \mathbf{i}_4 - k_x \mathbf{j}_4) \quad (4.77)$$

### 4.2.1 Sistema de ecuaciones

El conjunto de ecuaciones que definen el problema como sistema de primer orden es:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad (4.78)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \quad (4.79)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z \quad (4.80)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad (4.81)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = 0 \quad (4.82)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g + \frac{3\mu_0\mu^2}{64\pi m z^4} (1 + k_z^2) \quad (4.83)$$

$$\frac{dk_{\bar{x}}}{dt} = \omega_{\bar{z}} k_{\bar{y}} - \omega_{\bar{y}} k_{\bar{z}} \quad (4.84)$$

$$\frac{dk_{\bar{y}}}{dt} = \omega_{\bar{x}} k_{\bar{z}} - \omega_{\bar{z}} k_{\bar{x}} \quad (4.85)$$

$$\frac{dk_{\bar{z}}}{dt} = \omega_{\bar{y}} k_{\bar{x}} - \omega_{\bar{x}} k_{\bar{y}} \quad (4.86)$$

$$\frac{d\omega_{\bar{x}}}{dt} = \omega_{\bar{y}} \omega_{\bar{z}} \left(1 - \frac{l_{\bar{z}\bar{z}}}{l_{\bar{x}\bar{x}}}\right) + \frac{\mu_0\mu^2}{32\pi l_{\bar{x}\bar{x}} z^3} k_{\bar{y}} k_{\bar{z}} \quad (4.87)$$

$$\frac{d\omega_{\bar{y}}}{dt} = \omega_{\bar{x}} \omega_{\bar{z}} \left(\frac{l_{\bar{z}\bar{z}}}{l_{\bar{x}\bar{x}}} - 1\right) - \frac{\mu_0\mu^2}{32\pi l_{\bar{x}\bar{x}} z^3} k_{\bar{x}} k_{\bar{z}} \quad (4.88)$$

$$\frac{d\omega_{\bar{z}}}{dt} = 0 \quad (4.89)$$

A partir de las ecuaciones 4.81, 4.82 y 4.89 se obtiene que la velocidad en el plano xy, respecto al sistema de referencia {1}, se mantiene constante; así como la velocidad de giro alrededor del eje z, en el sistema de referencia {4}, denominada como:

$$\omega_{\bar{z}} = \omega \quad (4.90)$$

#### Sistema de ecuaciones de relevancia

$$\frac{dz}{dt} = v_z \quad (4.91)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g + \frac{3\mu_0\mu^2}{64\pi m z^4} (1 + k_z^2) \quad (4.92)$$

$$\frac{dk_{\bar{x}}}{dt} = \omega k_{\bar{y}} - \omega_{\bar{y}} k_{\bar{z}} \quad (4.93)$$

$$\frac{dk_{\bar{y}}}{dt} = \omega_{\bar{x}} k_{\bar{z}} - \omega k_{\bar{x}} \quad (4.94)$$

$$\frac{dk_{\bar{z}}}{dt} = \omega_{\bar{y}} k_{\bar{x}} - \omega_{\bar{x}} k_{\bar{y}} \quad (4.95)$$

$$\frac{d\omega_{\bar{x}}}{dt} = \omega_{\bar{y}} \omega \left(1 - \frac{l_{\bar{z}\bar{z}}}{l_{\bar{x}\bar{x}}}\right) + \frac{\mu_0\mu^2}{32\pi l_{\bar{x}\bar{x}} z^3} k_{\bar{y}} k_{\bar{z}} \quad (4.96)$$

$$\frac{d\omega_{\bar{y}}}{dt} = \omega_{\bar{x}} \omega \left(\frac{l_{\bar{z}\bar{z}}}{l_{\bar{x}\bar{x}}} - 1\right) - \frac{\mu_0\mu^2}{32\pi l_{\bar{x}\bar{x}} z^3} k_{\bar{x}} k_{\bar{z}} \quad (4.97)$$

## 4.2.2 Adimensionalización de las ecuaciones

Definiendo la posición de equilibrio  $z_0$  como la posición en dirección  $z$  del dipolo magnético con orientación inicial horizontal  $k_z(0) = 0$  en el sistema de referencia {1}, y el tiempo de referencia  $t_0$  como una magnitud derivada de esta; se usan como referencia para adimensionalizar el sistema de ecuaciones anterior de la siguiente forma:

$$z_0 = \sqrt[4]{\frac{3\mu_0\mu^2}{64\pi mg}} \quad (4.98)$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{z_0}{g}} = \sqrt[8]{\frac{3\mu_0\mu^2}{64\pi mg^9}} \quad (4.99)$$

## Análisis dimensional de variables

Tiempo  $[t] = T$

Posición  $[r] = L$

Velocidad  $\left[\frac{dr}{dt}\right] = LT^{-1}$

$[v] = LT^{-1}$

Aceleración  $\left[\frac{dv}{dt}\right] = LT^{-2}$

Orientación  $[k] = 1$

Velocidad angular  $\left[\frac{dk}{dt}\right] = T^{-1}$

$[\omega] = T^{-1}$

Aceleración angular  $\left[\frac{d\omega}{dt}\right] = T^{-2}$

## Adimensionalización usando variables de referencia

$\tau = \frac{t}{t_0}$

$(\xi \eta \zeta)^T = \frac{1}{z_0} (x y z)^T$

$\frac{d}{dt}(\xi \eta \zeta)^T = \frac{t_0}{z_0} \frac{d}{dt}(x y z)^T \equiv \frac{1}{\sqrt{g z_0}} \frac{d}{dt}(x y z)^T$

$(v_x v_y v_z)^T = \frac{t_0}{z_0} (v_x v_y v_z)^T \equiv \frac{1}{\sqrt{g z_0}} (v_x v_y v_z)^T$

$\frac{d}{dt}(v_x v_y v_z)^T = \frac{t_0^2}{z_0} \frac{d}{dt}(v_x v_y v_z)^T \equiv \frac{1}{g} \frac{d}{dt}(v_x v_y v_z)^T$

$(k_{\bar{x}} k_{\bar{y}} k_{\bar{z}})^T = (k_{\bar{x}} k_{\bar{y}} k_{\bar{z}})^T$

$\frac{d}{dt}(k_{\bar{x}} k_{\bar{y}} k_{\bar{z}})^T = t_0 \frac{d}{dt}(k_{\bar{x}} k_{\bar{y}} k_{\bar{z}})^T \equiv \sqrt{\frac{z_0}{g}} \frac{d}{dt}(k_{\bar{x}} k_{\bar{y}} k_{\bar{z}})^T$

$(\omega_x \omega_y \omega_z)^T = t_0 (\omega_x \omega_y \omega_z)^T \equiv \sqrt{\frac{z_0}{g}} (\omega_x \omega_y \omega_z)^T$

$\frac{d}{dt}(\omega_x \omega_y \omega_z)^T = t_0^2 \frac{d}{dt}(\omega_x \omega_y \omega_z)^T \equiv \frac{z_0}{g} \frac{d}{dt}(\omega_x \omega_y \omega_z)^T$

Las ecuaciones 4.103 a 4.114 se pueden adimensionalizar introduciendo los siguientes parámetros:

- **Parámetro geométrico:** Define una relación entre el momento de inercia alrededor del eje  $z$  respecto al momento de inercia alrededor del eje  $x$ , en el sistema de referencia {4}. Se trata de un parámetro puramente geométrico puesto que únicamente depende del valor de las componentes del tensor de inercia del dipolo:

$$\lambda = \frac{I_{zz}}{I_{xx}} \quad (4.100)$$

Dependiendo del valor de este parámetro, el dipolo adquiere una geometría u otra:

- **Geometría de varilla:**  $\lambda = 0$  Inercia alrededor de eje  $\bar{z}$  despreciable
- **Geometría de esfera:**  $\lambda = 1$  Inercia equivalente alrededor de cualquier eje
- **Geometría de disco:**  $\lambda = 2$  Inercia alrededor de eje  $\bar{z}$  doble que alrededor de otros ejes
- **Parámetro magnético:** Define una relación entre el producto de la masa y el cuadrado del valor de la posición de equilibrio  $z_0$ , respecto del momento de inercia alrededor del eje  $x$  en el sistema de referencia {4}. De esta forma, es un parámetro que depende tanto de la masa como de la intensidad del dipolo:

$$\beta = \frac{m z_0^2}{I_{xx}} \quad \text{donde} \quad z_0 = z_0(m, \mu) \quad (4.101)$$

Luego, teniendo en consideración la expresión 4.98, este parámetro cumple la siguiente relación:

$$\beta \propto \sqrt{m} \mu \quad (4.102)$$

es decir, al igual que antes, es más sensible frente a variaciones de  $\mu$  que de la masa del dipolo.

### 4.2.3 Sistema de ecuaciones adimensionales

El conjunto de ecuaciones adimensionales que definen el problema como sistema de primer orden es:

$$\frac{d\xi}{dt} = v_x \quad (4.103)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = v_y \quad (4.104)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = v_z \quad (4.105)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad (4.106)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = 0 \quad (4.107)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -1 + \frac{1 + \kappa_z^2}{\zeta^4} \quad (4.108)$$

$$\frac{d\kappa_{\bar{x}}}{dt} = \varpi_{\bar{z}} \kappa_{\bar{y}} - \varpi_{\bar{y}} \kappa_{\bar{z}} \quad (4.109)$$

$$\frac{d\kappa_{\bar{y}}}{dt} = \varpi_{\bar{x}} \kappa_{\bar{z}} - \varpi_{\bar{z}} \kappa_{\bar{x}} \quad (4.110)$$

$$\frac{d\kappa_{\bar{z}}}{dt} = \varpi_{\bar{y}} \kappa_{\bar{x}} - \varpi_{\bar{x}} \kappa_{\bar{y}} \quad (4.111)$$

$$\frac{d\varpi_{\bar{x}}}{dt} = (1 - \lambda) \varpi_{\bar{y}} \varpi_{\bar{z}} + \frac{2\beta}{3\zeta^3} \kappa_{\bar{y}} \kappa_{\bar{z}} \quad (4.112)$$

$$\frac{d\varpi_{\bar{y}}}{dt} = (\lambda - 1) \varpi_{\bar{x}} \varpi_{\bar{z}} - \frac{2\beta}{3\zeta^3} \kappa_{\bar{x}} \kappa_{\bar{z}} \quad (4.113)$$

$$\frac{d\varpi_{\bar{z}}}{dt} = 0 \quad (4.114)$$

A partir de las ecuaciones 4.106, 4.107 y 4.114 se obtiene que la velocidad adimensional en el plano xy, respecto al sistema de referencia {1}, se mantiene constante; así como la velocidad adimensional de giro alrededor del eje z, en el sistema de referencia {4}, denominada como:

$$\varpi_{\bar{z}} = \Omega \quad (4.115)$$

#### Sistema de ecuaciones adimensionales de relevancia

$$\frac{d\zeta}{dt} = v_z \quad (4.116)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -1 + \frac{1 + \kappa_z^2}{\zeta^4} \quad (4.117)$$

$$\frac{d\kappa_{\bar{x}}}{dt} = \Omega \kappa_{\bar{y}} - \varpi_{\bar{y}} \kappa_{\bar{z}} \quad (4.118)$$

$$\frac{d\kappa_{\bar{y}}}{dt} = \varpi_{\bar{x}} \kappa_{\bar{z}} - \Omega \kappa_{\bar{x}} \quad (4.119)$$

$$\frac{d\kappa_{\bar{z}}}{dt} = \varpi_{\bar{y}} \kappa_{\bar{x}} - \varpi_{\bar{x}} \kappa_{\bar{y}} \quad (4.120)$$

$$\frac{d\varpi_{\bar{x}}}{dt} = (1 - \lambda) \Omega \varpi_{\bar{y}} + \frac{2\beta}{3\zeta^3} \kappa_{\bar{y}} \kappa_{\bar{z}} \quad (4.121)$$

$$\frac{d\varpi_{\bar{y}}}{dt} = (\lambda - 1) \Omega \varpi_{\bar{x}} - \frac{2\beta}{3\zeta^3} \kappa_{\bar{x}} \kappa_{\bar{z}} \quad (4.122)$$

En este caso, se obtiene un sistema de 7 ecuaciones en lugar de las 6 mostradas en el sistema formado por las expresiones 4.61 a 4.66 en la sección 4.1.3, pero algebraicamente más sencillas puesto que no contiene ecuaciones trigonométricas.

### 4.3 Constantes de movimiento

Haciendo uso de la formulación con proyección de bases<sup>a</sup>, se obtienen las siguientes tres constantes de movimiento del dipolo sobre un plano superconductor, las cuales representan valores que permanecen inalterables durante la evolución del sistema.

#### Constante de movimiento 1

La derivada de un vector unitario definido en el sistema de referencia {1} respecto de dicha base es nula, puesto que tanto su módulo como su dirección y sentido permanecen invariables con el tiempo. Mediante la *fórmula de Poisson*<sup>b</sup> es posible relacionar la derivada de un vector unitario en dicho sistema de referencia con la derivada de este vector unitario expresado en el sistema de referencia ligado, incluyendo un término de rotación que vincula sendas bases como se muestra en la siguiente expresión:

$$\left. \frac{d\mathbf{k}_1}{dt} \right|_1 = \left. \frac{d\mathbf{k}_1}{dt} \right|_4 + \boldsymbol{\omega}_{41} \times \mathbf{k}_1 = 0 \quad (4.123)$$

Separando los términos del último miembro de la ecuación anterior y multiplicando ambos miembros resultantes por el vector unitario se llega a:

$$\mathbf{k}_1 \cdot \left. \frac{d\mathbf{k}_1}{dt} \right|_4 \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} |\mathbf{k}_1|^2 \right) \Big|_4 = \mathbf{k}_1 (\mathbf{k}_1 \times \boldsymbol{\omega}_{41}) = 0 \quad (4.124)$$

a partir de lo cual se obtiene que el módulo al cuadrado del vector unitario expresado en el sistema de referencia ligado es constante:

$$|\mathbf{k}_1|^2 = \text{cte} \equiv k_X^2 + k_Y^2 + k_Z^2 = 1 \quad (4.125)$$

siendo la constante igual a la unidad debido a que el vector se define con dicho módulo en el sistema de referencia {1}. Utilizando la formulación adimensional, la expresión anterior se puede reescribir como:

$$\kappa^2 = \kappa_X^2 + \kappa_Y^2 + \kappa_Z^2 = 1 \quad (4.126)$$

#### Constante de movimiento 2

Proyectando en la dirección del vector unitario  $\mathbf{z}$  del sistema de referencia {1} la derivada del vector momento cinético – según la expresión 4.68 – y con el valor del par – definido por la expresión ?? – se obtiene:

$$\left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_1 \cdot \mathbf{k}_1 \equiv \left. \frac{d(\mathbf{L} \cdot \mathbf{k}_1)}{dt} \right|_1 = 0 \quad (4.127)$$

donde se ha tenido en cuenta que la derivada del vector unitario, definido en el sistema de referencia {1} respecto de dicha base es nula, según la ecuación 4.123. Asimismo, teniendo en consideración la definición del vector unitario  $\mathbf{k}_1$  en el sistema de referencia ligado y del momento cinético según las ecuaciones 2.90 y ??, respectivamente, se llega a que la siguiente magnitud es constante:

$$L_z = \mathbf{L} \cdot \mathbf{k}_1 = [l_{XX}(\omega_X \mathbf{i}_4 + \omega_Y \mathbf{j}_4) + l_{ZZ}\omega_Z \mathbf{k}_4] \cdot \mathbf{k}_1 = l_{XX}(\omega_X k_X + \omega_Y k_Y) + l_{ZZ}\omega_Z k_Z = \text{cte} \quad (4.128)$$

introduciendo el valor de los parámetros adimensionales, se reescribe como:

$$L_z = l_{XX} \sqrt{\frac{z_0}{g}} (\omega_X \kappa_X + \omega_Y \kappa_Y + \lambda \Omega \kappa_Z) = \text{cte} \quad (4.129)$$

<sup>a</sup> Sección 2.2.2

<sup>b</sup> Ecuación 2.66

### Constante de movimiento 3

A pesar de que la energía mecánica no es invariable, es posible obtener una constante de movimiento del tipo energética. Derivando la ecuación de la energía cinética de rotación del dipolo y teniendo en cuenta que, según la ecuación 4.89, la velocidad de rotación alrededor del eje  $z$  en el sistema de referencia {3} es constante, se tiene:

$$\frac{dT_R}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I_{\bar{X}\bar{X}} (\omega_{\bar{X}}^2 + \omega_{\bar{Y}}^2 + \lambda \omega^2) \right) = I_{\bar{X}\bar{X}} \left( \omega_{\bar{X}} \frac{d\omega_{\bar{X}}}{dt} + \omega_{\bar{Y}} \frac{d\omega_{\bar{Y}}}{dt} \right) \quad (4.130)$$

Usando las ecuaciones 4.87, 4.88 y, posteriormente 4.86, esta ecuación se reescribe como:

$$\begin{aligned} \frac{dT_R}{dt} &= I_{\bar{X}\bar{X}} \omega_{\bar{X}} \left( \omega_{\bar{Y}} \omega (1-\lambda) + \frac{\mu_0 \mu^2}{32\pi I_{\bar{X}\bar{X}} z^3} k_{\bar{Y}} k_{\bar{Z}} \right) + I_{\bar{X}\bar{X}} \omega_{\bar{Y}} \left( \omega_{\bar{X}} \omega (\lambda-1) - \frac{\mu_0 \mu^2}{32\pi I_{\bar{X}\bar{X}} z^3} k_{\bar{X}} k_{\bar{Z}} \right) = \\ &= \frac{\mu_0 \mu^2}{32\pi z^3} k_{\bar{Z}} (\omega_{\bar{X}} k_{\bar{Y}} - \omega_{\bar{Y}} k_{\bar{X}}) = -\frac{\mu_0 \mu^2}{32\pi z^3} k_{\bar{Z}} \frac{dk_{\bar{Z}}}{dt} = -\frac{\mu_0 \mu^2}{32\pi z^3} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} k_{\bar{Z}}^2 \right) = \\ &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_0 \mu^2}{64\pi z^3} k_{\bar{Z}}^2 \right) + \frac{1}{2} k_{\bar{Z}}^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_0 \mu^2}{32\pi z^3} \right) \end{aligned} \quad (4.131)$$

El último sumando de esta expresión se puede reformular, teniendo en cuenta la ecuación 4.83, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k_{\bar{Z}}^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_0 \mu^2}{32\pi z^3} \right) &= \frac{1}{2} \left( \frac{64\pi m z^4}{3\mu_0 \mu^2} \left( \frac{dv_z}{dt} + g \right) - 1 \right) \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_0 \mu^2}{32\pi z^3} \right) = \\ &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_0 \mu^2}{64\pi z^3} \right) + \frac{m z^4}{3} \left( \frac{dv_z}{dt} + g \right) \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{z^3} \right) \end{aligned} \quad (4.132)$$

y, a su vez, el último término de la expresión anterior es equivalente a lo siguiente, teniendo en cuenta la ecuación 4.80:

$$\frac{m z^4}{3} \left( \frac{dv_z}{dt} + g \right) \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{z^3} \right) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_z^2 \right) - \frac{d}{dt} (mgz) \quad (4.133)$$

Así pues, combinando las ecuaciones 4.130, 4.131, 4.132 y 4.133 se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_z^2 + \frac{1}{2} I_{\bar{X}\bar{X}} (\omega_{\bar{X}}^2 + \omega_{\bar{Y}}^2 + \lambda \omega^2) + mgz + \frac{\mu_0 \mu^2}{64\pi z^3} (1 + k_{\bar{Z}}^2) \right) = 0 \quad (4.134)$$

Utilizando el valor de los parámetros adimensionales<sup>a</sup>, se obtiene la siguiente constante:

$$E = I_{\bar{X}\bar{X}} \frac{g}{z_0} \left( \frac{1}{2} \beta v_z^2 + \frac{1}{2} (\varpi_{\bar{X}}^2 + \varpi_{\bar{Y}}^2 + \lambda \Omega^2) + \beta \zeta + \frac{\beta}{3\zeta^3} (1 + \kappa_{\bar{Z}}^2) \right) = \text{cte} \quad (4.135)$$

### Constantes de movimiento

$$\kappa^2 = \kappa_{\bar{X}}^2 + \kappa_{\bar{Y}}^2 + \kappa_{\bar{Z}}^2 \quad (4.136)$$

$$\Lambda = \varpi_{\bar{X}} \kappa_{\bar{X}} + \varpi_{\bar{Y}} \kappa_{\bar{Y}} + \lambda \Omega \kappa_{\bar{Z}} \quad (4.137)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \beta v_z^2 + \frac{1}{2} (\varpi_{\bar{X}}^2 + \varpi_{\bar{Y}}^2 + \lambda \Omega^2) + \beta \zeta + \frac{\beta}{3\zeta^3} (1 + \kappa_{\bar{Z}}^2) \quad (4.138)$$

<sup>a</sup> Sección 4.2.2





## 5 Movimiento sobre un medio superconductor

En este capítulo se analizan los resultados numéricos obtenidos haciendo uso de la formulación desarrollada en la sección 4.2.

En concreto, se analiza y compara la evolución de un dipolo magnético con geometría de disco, al variar diferentes parámetros. Y por último, se comparan tres geometrías diferentes de dipolos, considerando a su vez, tres orientaciones iniciales diferentes.

El sistema queda determinado por 10 variables, caracterizadas por los siguientes parámetros y condiciones iniciales:

- **Parámetros del dipolo:** Geometría ( $\lambda$ ), intensidad magnética ( $\beta$ ) y velocidad de rotación ( $\Omega$ )
- **Condiciones iniciales del sistema:** Altura inicial ( $\zeta(0)$ ), velocidad inicial ( $v_z(0)$ ), orientación inicial ( $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0)$ ), velocidad de rotación inicial alrededor de los ejes de no simetría ( $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0)$ )

Este sistema se puede reducir usando la expresión 4.126, de forma que la componente  $\kappa_{\bar{y}}(0)$  se expresa en función de  $\kappa_{\bar{x}}(0)$  y  $\kappa_{\bar{z}}(0)$  como:

$$\kappa_{\bar{y}}(0) = \sqrt{1 - \kappa_{\bar{x}}^2(0) - \kappa_{\bar{z}}^2(0)} \quad (5.1)$$

Además, considerando que la velocidad inicial del dipolo es siempre nula:

$$v_z(0) = 0 \quad (5.2)$$

y las velocidades de rotación inicial alrededor de los dos ejes de no simetría del dipolo son equivalentes:

$$\varpi_{\bar{x}}(0) = \varpi_{\bar{y}}(0) \quad (5.3)$$

Las únicas variables a tener en cuenta para la determinación del problema son las siguientes siete:

- Geometría del dipolo:  $\lambda$
- Intensidad magnética del dipolo:  $\beta$
- Velocidad de rotación del eje de simetría del dipolo:  $\Omega$
- Altura inicial del dipolo:  $\zeta(0)$
- Orientación inicial del dipolo:  $\kappa_{\bar{x}}(0)$  y  $\kappa_{\bar{z}}(0)$
- Velocidad de rotación inicial alrededor de los ejes de no simetría del dipolo:  $\varpi_{\bar{x}}(0)$

## 5.1 Dipolo con configuración geométrica de un disco

En el caso de que el dipolo magnético presente una configuración geométrica similar a la de un disco delgado, la inercia del eje de simetría del dipolo es el doble que la inercia alrededor de los otros ejes. Para un caso genérico, caracterizado por las siguientes propiedades:

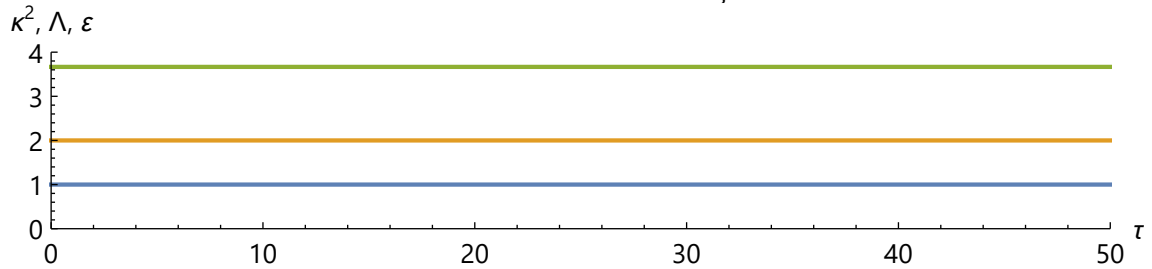
- **Parámetros del sistema**
  - Geometría de disco:  $\lambda = 2$
  - Intensidad magnética *media*:  $\beta = 1$
  - Velocidad de rotación del eje de simetría *media*:  $\Omega = 1$
- **Condiciones iniciales del problema**
  - Altura inicial *unidad*:  $\zeta(0) = 1$
  - Velocidad inicial *nula*:  $v_z(0) = 0$
  - Orientación inicial *vertical*:  $\kappa_z(0) = 1$
  - Velocidad iniciales de rotación de ejes de no simetría *media*:  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$

se obtiene el siguiente valor de las constantes de movimiento<sup>a</sup>, donde se indica el código de color de cada una de estas, representadas en la figura 5.1:

$$\bullet \kappa^2 = \kappa_{\bar{x}}^2 + \kappa_{\bar{y}}^2 + \kappa_z^2 = 1 \quad (5.4)$$

$$\bullet \Lambda = \varpi_{\bar{x}}\kappa_{\bar{x}} + \varpi_{\bar{y}}\kappa_{\bar{y}} + \lambda\Omega\kappa_z = 2 \quad (5.5)$$

$$\bullet \varepsilon = \frac{1}{2}\beta v_z^2 + \frac{1}{2}\left(\varpi_{\bar{x}}^2 + \varpi_{\bar{y}}^2 + \lambda\Omega^2\right) + \beta\zeta + \frac{\beta}{3\zeta^3}\left(1 + \kappa_z^2\right) = 3.667 \quad (5.6)$$



**Figura 5.1** Valor de constantes del sistema:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_z(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$

A continuación se compara la evolución temporal de ciertas variables del dipolo al caer sobre el plano superconductor, considerando tres orientaciones iniciales diferentes de este, en los siguientes escenarios donde uno de los parámetros toma dos valores distintos mientras que, los otros permanecen constantes:

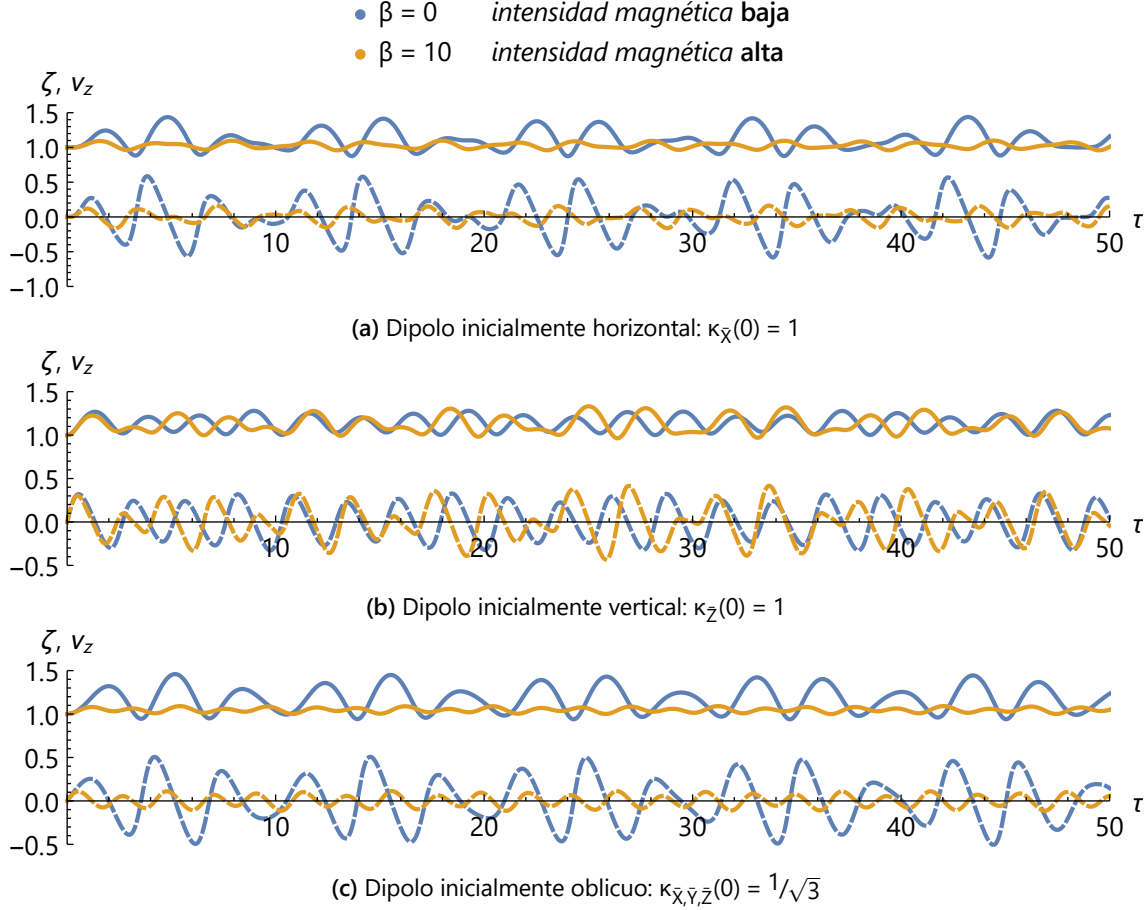
- Aumento de intensidad magnética:  $\beta = \{0, 10\}$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$
- Aumento de velocidad de rotación del eje de simetría:  $\beta = 1$ ,  $\Omega = \{0, 10\}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$
- Aumento de velocidad de rotación inicial de otros ejes:  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = \{0, 10\}$

donde el resto de parámetros y condiciones iniciales que definen el conjunto no varían, esto es:  $\lambda = 2$ ,  $\zeta(0) = 1$ ,  $v_z(0) = 0$ .

<sup>a</sup> Sección 4.3

### 5.1.1 Aumento de la intensidad magnética

En esta sección se analiza la evolución temporal de la posición, velocidad, velocidad de rotación y trayectoria del polo (+) de un dipolo con *geometría* de disco, *velocidad de rotación del eje de simetría* y *velocidad de rotación inicial de ejes de no simetría media*, considerando tres *orientaciones iniciales* distintas: **horizontal**, **vertical** y **oblicua**, comparando los resultados para los valores:



**Figura 5.2** Posición ( — ) y velocidad ( - - ) :  $\lambda = 2$ ,  $\beta = \{0, 10\}$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}, \bar{y}}(0) = 1$

En la figura 5.2 se muestra la evolución de la posición y velocidad del dipolo – que parte con una altura inicial unidad y una velocidad inicial nula – para varios valores del parámetro magnético, según su orientación inicial.

En la figura 5.2a se compara la posición y velocidad del dipolo inicialmente **horizontal** con:

- Intensidad magnética **baja**:  $\zeta \in [0.87, 1.44)$ ,  $v_z \in (-0.58, 0.57)$
- Intensidad magnética **alta**:  $\zeta \in [0.96, 1.10)$ ,  $v_z \in (-0.15, 0.15]$

Al aumentar  $\beta$ , la variación de la posición del cdm del dipolo disminuye un  $\Delta\zeta \approx 75\%$  y el rango de valores de velocidad disminuye un  $\Delta v_z \approx 74\%$ .

En la figura 5.2b se compara la posición y velocidad del dipolo inicialmente **vertical** con:

- Intensidad magnética **baja**:  $\zeta \in [1.00, 1.28)$ ,  $v_z \in (-0.33, 0.32]$
- Intensidad magnética **alta**:  $\zeta \in [0.98, 1.33)$ ,  $v_z \in [-0.42, 0.43]$

Al aumentar  $\beta$ , la variación de la posición del cdm del dipolo aumenta un  $\Delta\zeta \approx 25\%$  y el rango de valores de velocidad aumenta un  $\Delta v_z \approx 31\%$ .

En la figura 5.2c se compara la posición y velocidad del dipolo inicialmente **oblicuo** con:

- Intensidad magnética **baja**:  $\zeta \in [0.94, 1.45]$ ,  $v_z \in (-0.49, 0.49)$
- Intensidad magnética **alta**:  $\zeta \in [1.00, 1.09]$ ,  $v_z \in [-0.11, 0.11]$

Al aumentar  $\beta$ , la variación de la posición del cdm del dipolo disminuye un  $\Delta\zeta \approx 82\%$  y el rango de valores de velocidad disminuye un  $\Delta v_z \approx 78\%$ .

En el caso de que el dipolo inicie el movimiento con orientación horizontal u oblicua, al aumentar  $\beta$ , la oscilación de este disminuye; pero, si el dipolo parte con una orientación vertical, las oscilaciones aumentan.

En la región izquierda de la figura 5.3 se muestra la trayectoria seguida por el polo (+) del dipolo así como su posición, orientación y líneas de corrientes generadas en el plano superconductor, en el instante final de la simulación, para varios valores del parámetro magnético y según su orientación inicial.

En la figura 5.3a se compara la trayectoria del polo (+) del dipolo inicialmente **horizontal** con:

- Intensidad magnética **baja**:  $\xi \in [0.17, 0.50]$ ,  $\eta \in [-0.43, 0.10]$ ,  $\theta \in (-11.15^\circ, 59.36^\circ)$
- Intensidad magnética **alta**:  $\xi \in (-0.50, 0.50]$ ,  $\eta \in (-0.50, 0.50)$ ,  $\theta \in [-9.31^\circ, 34.39^\circ]$

Al aumentar  $\beta$ , el rango de valores de orientación del dipolo disminuye un  $\Delta\theta \approx 38\%$ .

En la figura 5.3c se compara la trayectoria del polo (+) del dipolo inicialmente **vertical** con:

- Intensidad magnética **baja**:  $\xi \in (-0.10, 0.43]$ ,  $\eta \in [-0.43, 0.10]$ ,  $\theta \in [19.49^\circ, 90.00^\circ]$
- Intensidad magnética **alta**:  $\xi \in (-0.49, 0.49]$ ,  $\eta \in (-0.50, 0.48]$ ,  $\theta \in [-18.00^\circ, 90.00^\circ]$

Al aumentar  $\beta$ , el rango de valores de orientación del dipolo aumenta un  $\Delta\theta \approx 53\%$ .

En la figura 5.3e se compara la trayectoria del polo (+) del dipolo inicialmente **oblicuo** con:

- Intensidad magnética **baja**:  $\xi \in (-0.29, 0.29)$ ,  $\eta \in (-0.41, 0.14)$ ,  $\theta \in [35.26^\circ, 74.16^\circ]$
- Intensidad magnética **alta**:  $\xi \in (-0.49, 0.49)$ ,  $\eta \in (-0.49, 0.49)$ ,  $\theta \in [10.72^\circ, 38.38^\circ]$

Al aumentar  $\beta$ , el rango de valores de orientación del dipolo aumenta un  $\Delta\theta \approx 28\%$ .

Para cualquiera de las orientaciones, la trayectoria que describe el dipolo tiene forma de circunferencia alrededor del eje vertical  $\zeta$  en el sistema de referencia fijo.

En la región derecha de la figura 5.3 se muestra la relación entre la velocidad de rotación de cada uno de los dos ejes de no simetría del dipolo – que parte con una velocidad de rotación inicial unidad – para varios valores del parámetro magnético, según su orientación inicial.

En la figura 5.3b se compara la velocidad de rotación del dipolo inicialmente **horizontal** con:

- Intensidad magnética **baja**:  $\varpi_{\bar{x}} \in [-1.41, 1.41]$ ,  $\varpi_{\bar{y}} \in [-1.41, 1.41]$
- Intensidad magnética **alta**:  $\varpi_{\bar{x}} \in (-1.37, 1.08)$ ,  $\varpi_{\bar{y}} \in (-1.38, 1.29]$

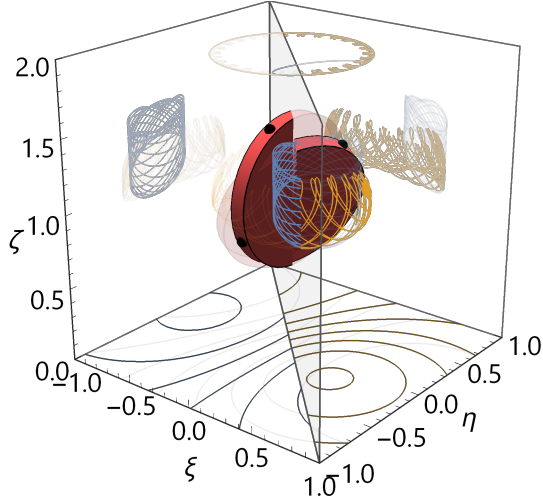
En la figura 5.3d se compara la velocidad de rotación del dipolo inicialmente **vertical** con:

- Intensidad magnética **baja**:  $\varpi_{\bar{x}} \in [-1.41, 1.41]$ ,  $\varpi_{\bar{y}} \in [-1.41, 1.41]$
- Intensidad magnética **alta**:  $\varpi_{\bar{x}} \in [-2.83, 2.76]$ ,  $\varpi_{\bar{y}} \in (-2.91, 2.78)$

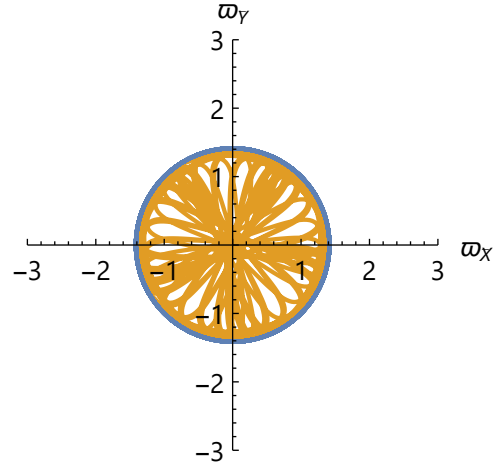
En la figura 5.3f se compara la velocidad de rotación del dipolo inicialmente **oblicuo** con:

- Intensidad magnética **baja**:  $\varpi_{\bar{x}} \in [-1.41, 1.41]$ ,  $\varpi_{\bar{y}} \in [-1.41, 1.41]$
- Intensidad magnética **alta**:  $\varpi_{\bar{x}} \in (-1.93, 1.93]$ ,  $\varpi_{\bar{y}} \in (-1.93, 1.96)$

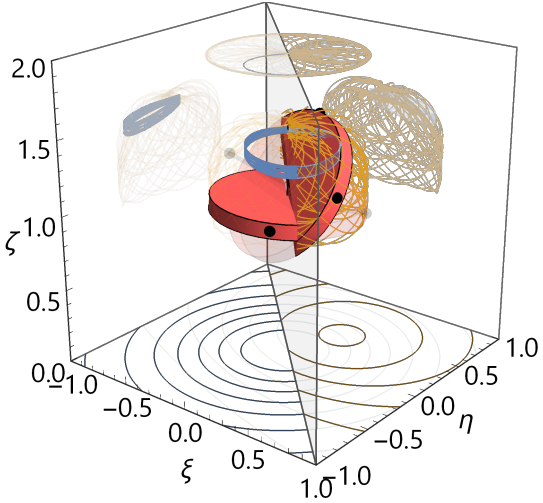
Para  $\beta = 0$ , la velocidad de rotación del eje  $\bar{Y}$  frente a la velocidad de rotación del eje  $\bar{X}$  genera una figura circunferencial de radio 1.41 mientras que, para  $\beta = 10$ , el patrón de flor generado se expande de manera radial, tanto más cuanto más vertical inicia el movimiento el dipolo.



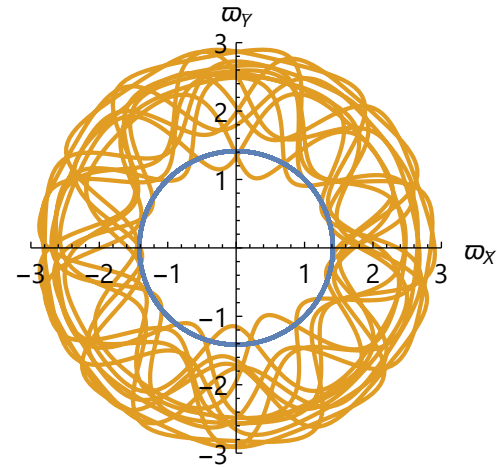
(a) Trayectoria y líneas de corriente<sup>a</sup>:  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$   
Extracto de figuras A.225 y A.261 del anexo



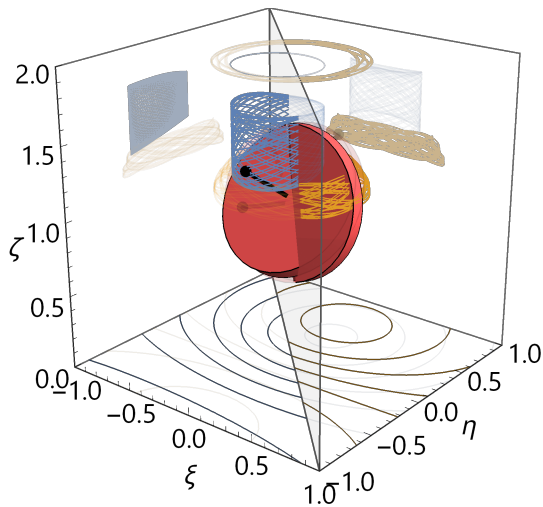
(b) Velocidad de rotación eje  $\bar{Y}$  frente eje  $\bar{X}$ :  
 $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$



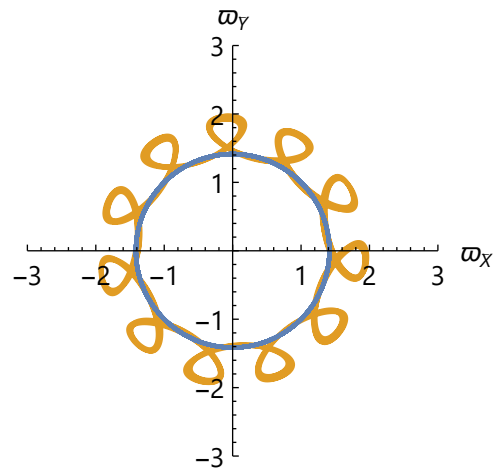
(c) Trayectoria y líneas de corriente<sup>a</sup>:  $\kappa_{\bar{Z}}(0) = 1$   
Extracto de figuras A.279 y A.315 del anexo



(d) Velocidad de rotación eje  $\bar{Y}$  frente eje  $\bar{X}$ :  
 $\kappa_{\bar{Z}}(0) = 1$



(e) Trayectoria y líneas de corriente<sup>a</sup>:  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$   
Extracto de figuras A.333 y A.369 del anexo



(f) Velocidad de rotación eje  $\bar{Y}$  frente eje  $\bar{X}$ :  
 $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$

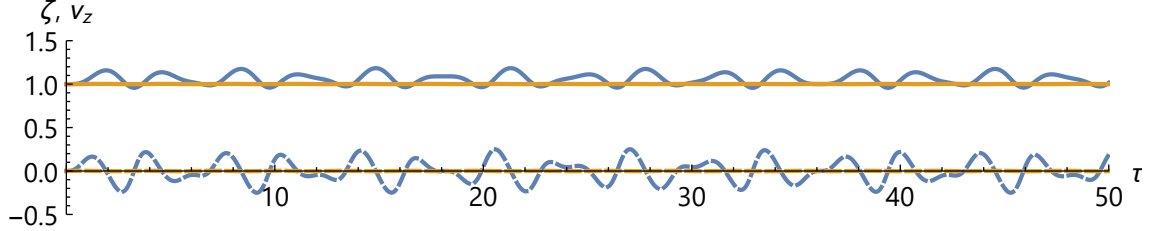
**Figura 5.3** Trayectoria y velocidad de rotación ejes  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$ :  $\lambda = 2$ ,  $\beta = \{0, 10\}$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

<sup>a</sup> Representación izqda.  $\beta = 0$ , dcha.  $\beta = 10$

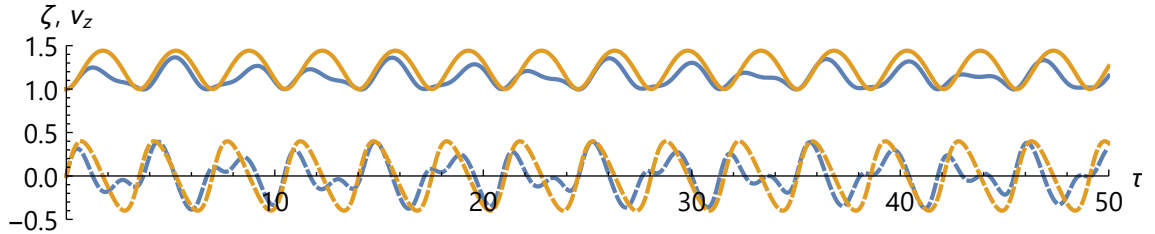
### 5.1.2 Aumento de la velocidad de rotación del eje de simetría del dipolo

En esta sección se analiza la evolución temporal de la posición, velocidad, velocidad de rotación y trayectoria del polo (+) de un dipolo con *geometría de disco*, *intensidad magnética* y *velocidad de rotación inicial de ejes de no simetría media*, considerando tres *orientaciones iniciales* distintas: **horizontal**, **vertical** y **oblicua**, comparando los resultados para los valores:

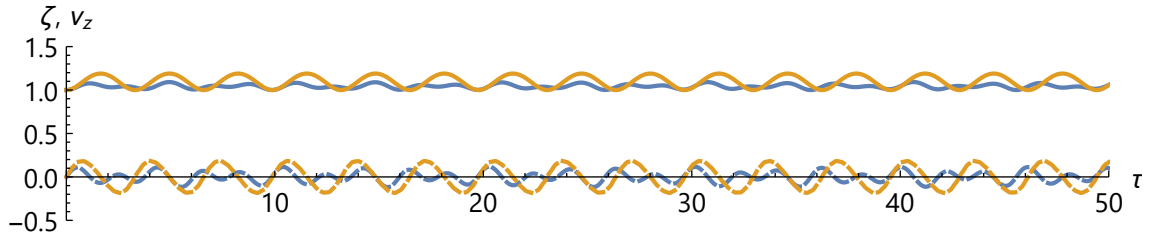
- $\Omega = 0$     *velocidad de rotación del eje de simetría baja*
- $\Omega = 10$     *velocidad de rotación del eje de simetría alta*



(a) Dipolo inicialmente horizontal:  $\kappa_{\bar{x}}(0) = 1$



(b) Dipolo inicialmente vertical:  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$



(c) Dipolo inicialmente oblicuo:  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$

**Figura 5.4** Posición ( — ) y velocidad ( - - ):  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = \{0, 10\}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$

En la figura 5.4 se muestra la evolución de la posición y velocidad del dipolo – que parte con una altura inicial unidad y una velocidad inicial nula – para varios valores de velocidad de rotación del eje de simetría, según su orientación inicial.

En la figura 5.4a se compara la posición y velocidad del dipolo inicialmente **horizontal** con:

- Velocidad de rotación **baja**:  $\zeta \in [0.96, 1.18]$ ,  $v_z \in (-0.25, 0.25)$
- Velocidad de rotación **alta**:  $\zeta \in [1.00, 1.00]$ ,  $v_z \in [0.00, 0.00]$

Mientras que, para  $\Omega = 0$  el dipolo oscila en torno a la altura inicial; para  $\Omega = 10$ , el dipolo permanece estático en la posición inicial.

En la figura 5.4b se compara la posición y velocidad del dipolo inicialmente **vertical** con:

- Velocidad de rotación **baja**:  $\zeta \in [1.00, 1.36]$ ,  $v_z \in (-0.39, 0.37)$
- Velocidad de rotación **alta**:  $\zeta \in [1.00, 1.44]$ ,  $v_z \in (-0.40, 0.39)$

Al aumentar  $\Omega$ , el dipolo aumenta su oscilación un  $\Delta\zeta \approx 22\%$ , mientras que, el rango de valores de velocidad aumenta únicamente un  $\Delta v_z \approx 4\%$ .

En la figura 5.4c se compara la posición y velocidad del dipolo inicialmente **oblicuo** con:

- Velocidad de rotación **baja**:  $\zeta \in [1.00, 1.09]$ ,  $v_z \in (-0.12, 0.12)$
- Velocidad de rotación **alta**:  $\zeta \in [1.00, 1.19]$ ,  $v_z \in [-0.18, 0.18]$

Al aumentar  $\Omega$ , el dipolo aumenta su oscilación un  $\Delta\zeta \approx 111\%$ , mientras que, el rango de valores de velocidad aumenta un  $\Delta v_z \approx 50\%$ .

Al aumentar  $\Omega$ , el dipolo aumenta su oscilación salvo cuando el dipolo inicia el movimiento con orientación horizontal, donde el dipolo disminuye su oscilación hasta tal punto de quedarse en posición de equilibrio estático.

En la región izquierda de la figura 5.5 se muestra la trayectoria seguida por el polo (+) del dipolo así como su posición, orientación y líneas de corrientes generadas en el plano superconductor, en el instante final de la simulación, para varios valores de velocidad de rotación del eje de simetría y según su orientación inicial.

En la figura 5.5a se compara la trayectoria del polo (+) del dipolo inicialmente **horizontal** con:

- Velocidad de rotación **baja**:  $\xi \in [-0.49, 0.50]$ ,  $\eta \in [-0.49, 0.50]$ ,  $\theta \in [-40.79^\circ, 40.57^\circ]$
- Velocidad de rotación **alta**:  $\xi \in [0.49, 0.50]$ ,  $\eta \in (-0.06, 0.09)$ ,  $\theta \in (-1.19^\circ, 6.88^\circ]$

Al aumentar  $\Omega$ , el dipolo disminuye el rango de valores de su orientación un  $\Delta\theta \approx 90\%$ .

En la figura 5.5c se compara la trayectoria del polo (+) del dipolo inicialmente **vertical** con:

- Velocidad de rotación **baja**:  $\xi \in [-0.35, 0.35]$ ,  $\eta \in [-0.35, 0.35]$ ,  $\theta \in [-89.58^\circ, 90.00^\circ]$
- Velocidad de rotación **alta**:  $\xi \in [-0.01, 0.07]$ ,  $\eta \in (-0.06, 0.07)$ ,  $\theta \in [81.89^\circ, 90.00^\circ]$

Al aumentar  $\Omega$ , el dipolo disminuye el rango de valores de su orientación un  $\Delta\theta \approx 95\%$ .

En la figura 5.5e se compara la trayectoria del polo (+) del dipolo inicialmente **oblicuo** con:

- Velocidad de rotación **baja**:  $\xi \in [-0.49, 0.49]$ ,  $\eta \in (-0.49, 0.49]$ ,  $\theta \in (-35.52^\circ, 35.31^\circ]$
- Velocidad de rotación **alta**:  $\xi \in (-0.01, 0.41)$ ,  $\eta \in (-0.41, 0.03]$ ,  $\theta \in [25.26^\circ, 43.28^\circ]$

Al aumentar  $\Omega$ , el dipolo disminuye el rango de valores de su orientación un  $\Delta\theta \approx 75\%$ .

Conforme aumenta  $\Omega$ , el dipolo disminuye el rango de valores de su orientación; siendo más acentuada esta disminución cuando el dipolo inicia el movimiento con orientación horizontal o vertical.

En la región derecha de la figura 5.5 se muestra la relación entre la velocidad de rotación de cada uno de los dos ejes de no simetría del dipolo – que parte con una velocidad de rotación inicial unidad – para varios valores de velocidad de rotación del eje de simetría, según su orientación inicial.

En la figura 5.5b se compara la velocidad de rotación del dipolo inicialmente **horizontal** con:

- Velocidad de rotación **baja**:  $\varpi_{\bar{x}} \in [0.90, 1.21]$ ,  $\varpi_{\bar{y}} \in (0.66, 1.04]$
- Velocidad de rotación **alta**:  $\varpi_{\bar{x}} \in [-1.41, 1.41]$ ,  $\varpi_{\bar{y}} \in [-1.41, 1.41]$

En la figura 5.5d se compara la velocidad de rotación del dipolo inicialmente **vertical** con:

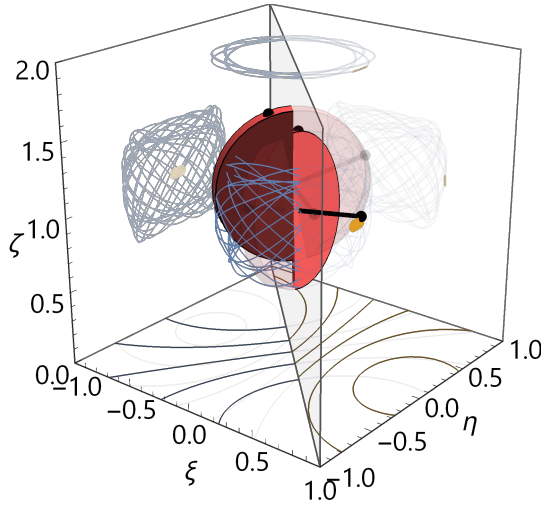
- Velocidad de rotación **baja**:  $\varpi_{\bar{x}} \in [1.00, 1.15]$ ,  $\varpi_{\bar{y}} \in [1.00, 1.15]$
- Velocidad de rotación **alta**:  $\varpi_{\bar{x}} \in (-1.42, 1.41]$ ,  $\varpi_{\bar{y}} \in [-1.41, 1.42]$

En la figura 5.5f se compara la velocidad de rotación del dipolo inicialmente **oblicuo** con:

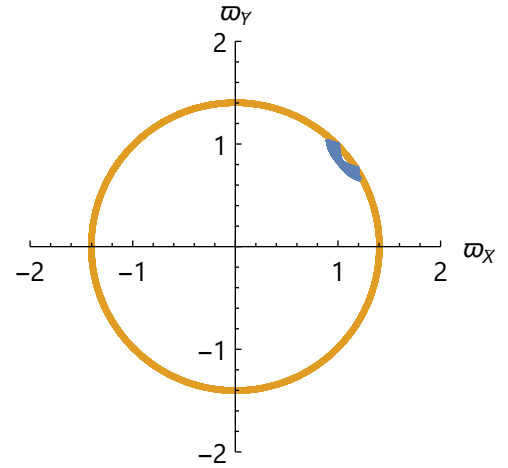
- Velocidad de rotación **baja**:  $\varpi_{\bar{x}} \in [0.90, 1.18]$ ,  $\varpi_{\bar{y}} \in (0.90, 1.17]$
- Velocidad de rotación **alta**:  $\varpi_{\bar{x}} \in [-1.41, 1.41]$ ,  $\varpi_{\bar{y}} \in [-1.40, 1.40]$

Para  $\Omega = 0$ , el valor de la velocidad de rotación del eje  $\bar{Y}$  del dipolo frente al eje  $\bar{X}$  describen un arco de circunferencia cuando el dipolo inicia el movimiento con orientación horizontal y oblicua; mientras que, cuando el dipolo inicialmente se encuentra en posición vertical, la relación entre las velocidades de rotación es una línea recta.

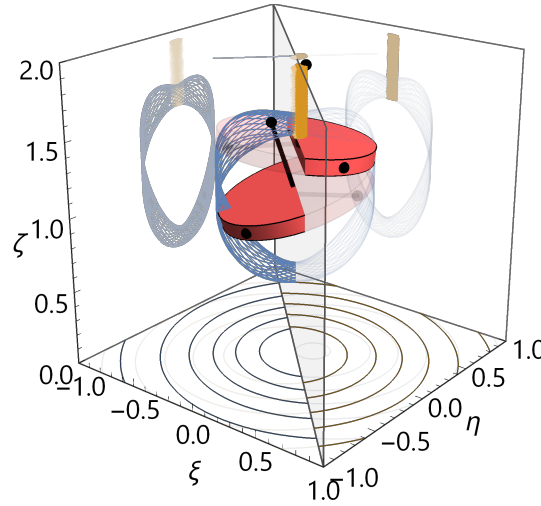
Para  $\Omega = 10$ , el patrón que describe el parámetro  $\varpi_{\bar{y}}$  frente a  $\varpi_{\bar{x}}$  es una circunferencia de radio  $r = 1.41$ .



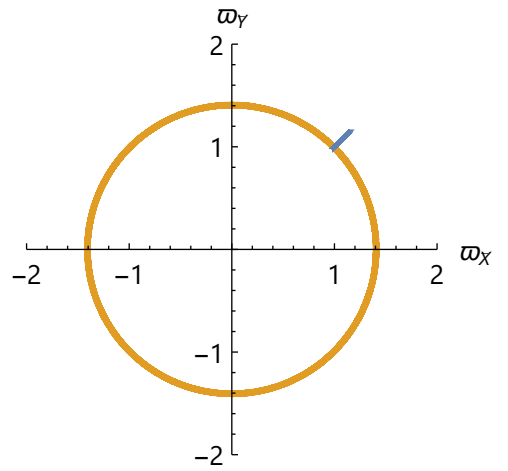
(a) Trayectoria y líneas de corriente<sup>a</sup>:  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$   
Extracto de figuras A.237 y A.249 del anexo



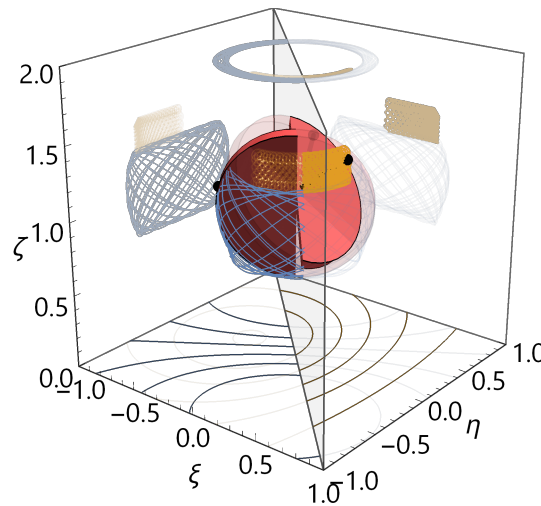
(b) Velocidad de rotación eje  $\bar{Y}$  frente eje  $\bar{X}$ :  
 $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$



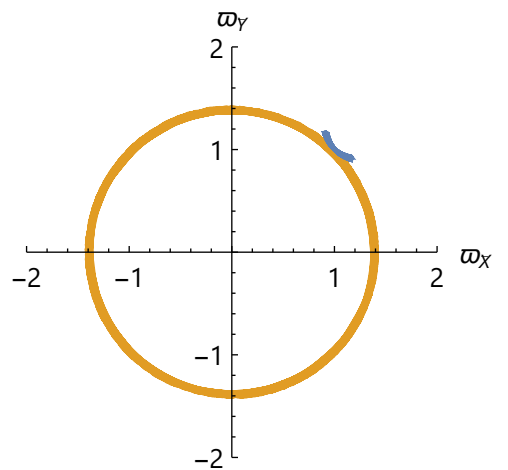
(c) Trayectoria y líneas de corriente<sup>a</sup>:  $\kappa_{\bar{Z}}(0) = 1$   
Extracto de figuras A.291 y A.303 del anexo



(d) Velocidad de rotación eje  $\bar{Y}$  frente eje  $\bar{X}$ :  
 $\kappa_{\bar{Z}}(0) = 1$



(e) Trayectoria y líneas de corriente<sup>a</sup>:  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$   
Extracto de figuras A.345 y A.357 del anexo



(f) Velocidad de rotación eje  $\bar{Y}$  frente eje  $\bar{X}$ :  
 $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$

**Figura 5.5** Trayectoria y velocidad de rotación ejes  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$ :  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = \{0, 10\}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

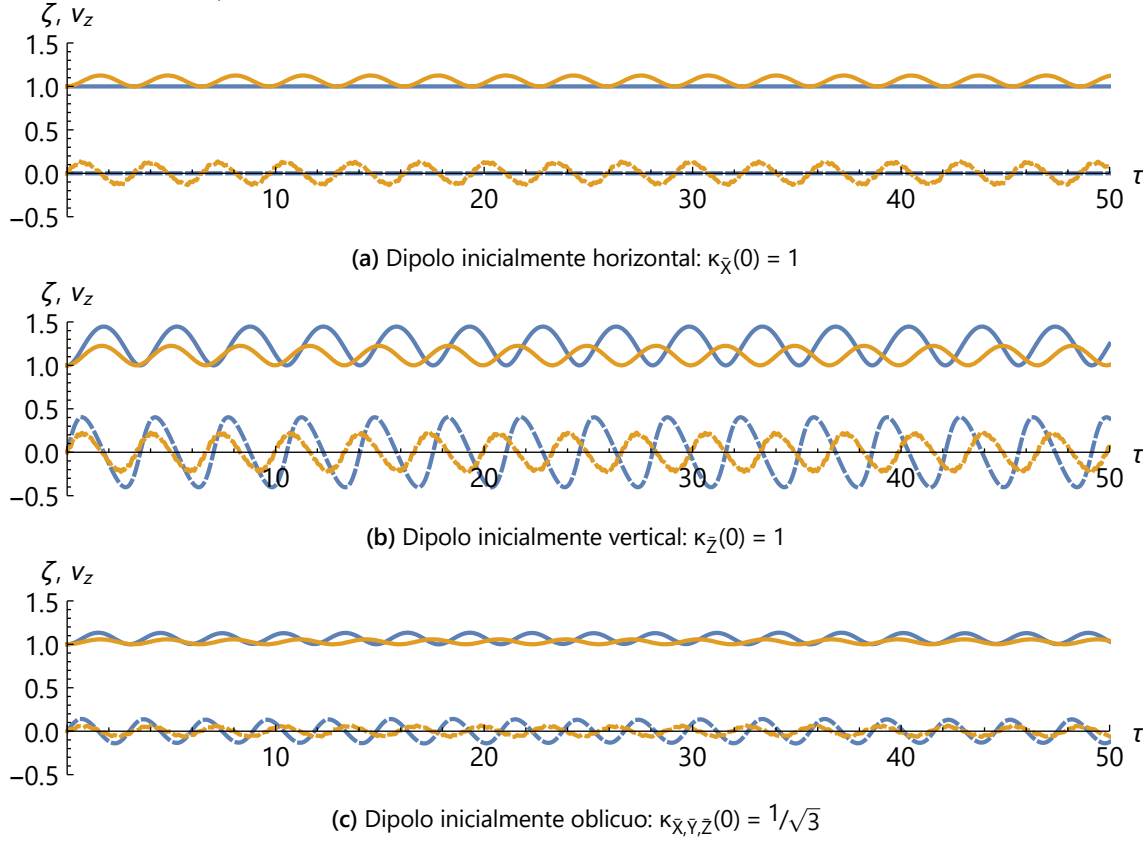
<sup>a</sup> Representación izqda.  $\Omega = 0$ , dcha.  $\Omega = 10$



### 5.1.3 Aumento de la velocidad de rotación inicial de ejes de no simetría del dipolo

En esta sección se analiza la evolución temporal de la posición, velocidad, velocidad de rotación y trayectoria del polo (+) de un dipolo con *geometría de disco*, con una *intensidad magnética* y *velocidad de rotación del eje de simetría media*, considerando tres *orientaciones iniciales* distintas: **horizontal**, **vertical** y **oblicua**, comparando los resultados para los valores:

- $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$       *velocidad de rotación inicial de ejes de no simetría baja*
- $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$     *velocidad de rotación inicial de ejes de no simetría alta*



**Figura 5.6** Posición ( — ) y velocidad ( - - ):  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = \{0, 10\}$

En la figura 5.6 se muestra la evolución de la posición y velocidad del dipolo – que parte con una altura inicial unidad y una velocidad inicial nula – para varios valores de velocidad de rotación inicial, según su orientación inicial.

En la figura 5.6a se compara la posición y velocidad del dipolo inicialmente **horizontal** con:

- Velocidad de rotación inicial **baja**:  $\zeta \in [1.00, 1.00]$ ,  $v_z \in [0.00, 0.00]$
- Velocidad de rotación inicial **alta**:  $\zeta \in [1.00, 1.13]$ ,  $v_z \in [-0.13, 0.13]$

Para  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$  el dipolo permanece estático en la misma altura inicial; mientras que, al aumentar a  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$ , el dipolo comienza a oscilar por encima de la altura inicial.

En la figura 5.6b se compara la posición y velocidad del dipolo inicialmente **vertical** con:

- Velocidad de rotación inicial **baja**:  $\zeta \in [1.00, 1.45]$ ,  $v_z \in [-0.40, 0.40]$
- Velocidad de rotación inicial **alta**:  $\zeta \in [1.00, 1.22]$ ,  $v_z \in [-0.22, 0.22]$

Al aumentar  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0)$ , la oscilación del dipolo disminuye un  $\Delta\zeta \approx 51\%$  y el rango de valores de velocidad disminuye un  $\Delta v_z \approx 45\%$ .

En la figura 5.6c se compara la posición y velocidad del dipolo inicialmente **oblicuo** con:

- Velocidad de rotación inicial **baja**:  $\zeta \in [1.00, 1.13]$ ,  $v_z \in [-0.14, 0.14]$
- Velocidad de rotación inicial **alta**:  $\zeta \in [1.00, 1.06]$ ,  $v_z \in [-0.06, 0.06]$

Al aumentar  $\omega_{\bar{x},\bar{y}}(0)$ , la oscilación del dipolo disminuye un  $\Delta\zeta \approx 54\%$  y el rango de valores de velocidad disminuye un  $\Delta v_z \approx 57\%$ .

En general, al aumentar la velocidad de rotación inicial  $\omega_{\bar{x},\bar{y}}(0)$ , el dipolo disminuye su oscilación y velocidad, salvo en el caso que comience el movimiento con orientación horizontal, que el aumento de este parámetro provoca que el dipolo salga de la posición de equilibrio y oscile por encima de dicha posición.

En la región izquierda de la figura 5.7 se muestra la trayectoria seguida por el polo (+) del dipolo así como su posición, orientación y líneas de corrientes generadas en el plano superconductor, en el instante final de la simulación, para varios valores de velocidad de rotación inicial y según su orientación inicial.

En la figura 5.7a se compara la trayectoria del polo (+) del dipolo inicialmente **horizontal** con:

- Velocidad de rotación inicial **baja**:  $\xi \in [0.50, 0.50]$ ,  $\eta \in [0.00, 0.00]$ ,  $\theta \in [0.00^\circ, 0.00^\circ]$
- Velocidad de rotación inicial **alta**:  $\xi \in [-0.49, 0.50]$ ,  $\eta \in [-0.47, 0.43]$ ,  $\theta \in [-37.46^\circ, 53.56^\circ]$

Para  $\omega_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$ , el dipolo permanece en la misma orientación horizontal con la que inicia el movimiento. Cuando  $\omega_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$ , el dipolo describe una trayectoria circular contenida en un plano inclinado respecto al plano superconductor.

En la figura 5.7c se compara la trayectoria del polo (+) del dipolo inicialmente **vertical** con:

- Velocidad de rotación inicial **baja**:  $\xi \in [0.00, 0.00]$ ,  $\eta \in [0.00, 0.00]$ ,  $\theta \in [90.00^\circ, 90.00^\circ]$
- Velocidad de rotación inicial **alta**:  $\xi \in [-0.38, 0.45]$ ,  $\eta \in [-0.40, 0.29]$ ,  $\theta \in [-73.83^\circ, 90.00^\circ]$

Para  $\omega_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$ , el dipolo permanece en la misma orientación vertical con la que inicia el movimiento. Cuando  $\omega_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$ , el dipolo describe una trayectoria circular contenida en un plano prácticamente perpendicular al plano superconductor.

En la figura 5.7e se compara la trayectoria del polo (+) del dipolo inicialmente **oblicuo** con:

- Velocidad de rotación inicial **baja**:  $\xi \in [-0.44, 0.44]$ ,  $\eta \in [-0.44, 0.44]$ ,  $\theta \in [27.39^\circ, 35.53^\circ]$
- Velocidad de rotación inicial **alta**:  $\xi \in [-0.49, 0.49]$ ,  $\eta \in [-0.50, 0.50]$ ,  $\theta \in [-19.21^\circ, 35.26^\circ]$

Para  $\omega_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$ , el dipolo describe una trayectoria circular alrededor del eje vertical  $\zeta$  en el sistema de referencia fijo.; mientras que, para  $\omega_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$ , el dipolo describe una trayectoria circular contenida en un plano inclinado respecto al plano superconductor. Asimismo, al aumentar  $\omega_{\bar{x},\bar{y}}(0)$ , el rango de la orientación aumenta un  $\Delta\theta \approx 569\%$ .

Al aumentar  $\omega_{\bar{x},\bar{y}}(0)$ , el dipolo comienza a describir una trayectoria circular, independientemente de su orientación inicial.

En la región derecha de la figura 5.7 se muestra la relación entre la velocidad de rotación de cada uno de los dos ejes de no simetría del dipolo para varios valores de velocidad de rotación inicial, según su orientación inicial.

En la figura 5.7b se compara la velocidad de rotación del dipolo inicialmente **horizontal** con:

- Velocidad de rotación inicial **baja**:  $\omega_{\bar{x}} \in [0.00, 0.00]$ ,  $\omega_{\bar{y}} \in [0.00, 0.00]$
- Velocidad de rotación inicial **alta**:  $\omega_{\bar{x}} \in [-14.13, 14.13]$ ,  $\omega_{\bar{y}} \in [-14.13, 14.13]$

En la figura 5.7d se compara la velocidad de rotación del dipolo inicialmente **vertical** con:

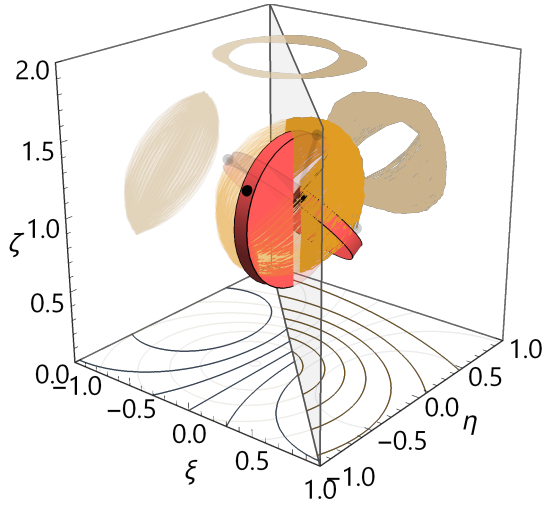
- Velocidad de rotación inicial **baja**:  $\omega_{\bar{x}} \in [0.00, 0.00]$ ,  $\omega_{\bar{y}} \in [0.00, 0.00]$
- Velocidad de rotación inicial **alta**:  $\omega_{\bar{x}} \in [-14.14, 14.14]$ ,  $\omega_{\bar{y}} \in [-14.15, 14.15]$

En la figura 5.7f se compara la velocidad de rotación del dipolo inicialmente **oblicuo** con:

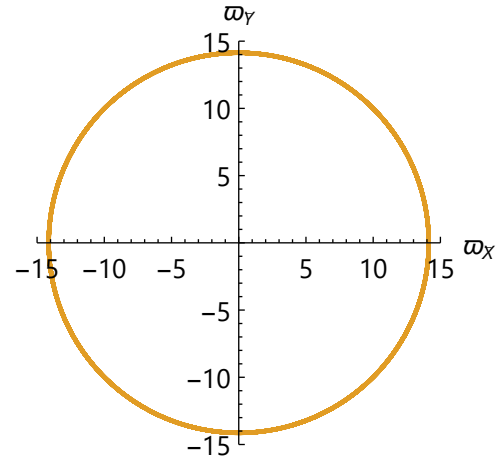
- Velocidad de rotación inicial **baja**:  $\omega_{\bar{x}} \in [-0.25, 0.25]$ ,  $\omega_{\bar{y}} \in [-0.26, 0.25]$
- Velocidad de rotación inicial **alta**:  $\omega_{\bar{x}} \in [-14.15, 14.15]$ ,  $\omega_{\bar{y}} \in [-14.14, 14.14]$

Para  $\omega_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$ , la velocidad de rotación de los ejes diferentes al de simetría permanecen con valor nulo cuando el dipolo comienza el movimiento inicialmente con orientación horizontal o vertical; mientras que, cuando la orientación inicial del dipolo es oblicua, la velocidad de rotación de estos ejes aumenta ligeramente con el tiempo.

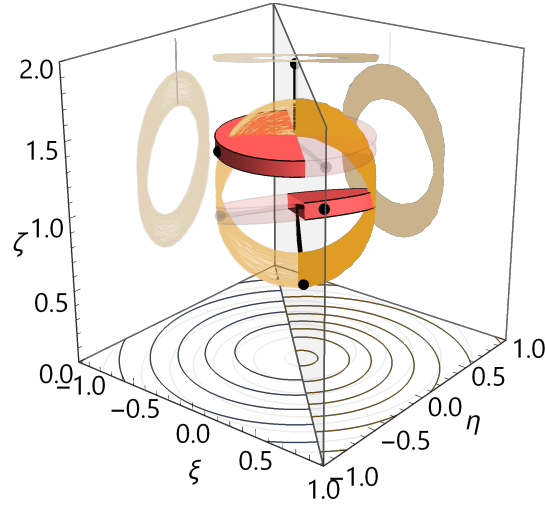
Cuando  $\omega_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$ , la velocidad de rotación del eje  $\bar{Y}$  respecto a la velocidad de rotación del eje  $\bar{X}$  describe una circunferencia de radio  $r \approx 14.15$ .



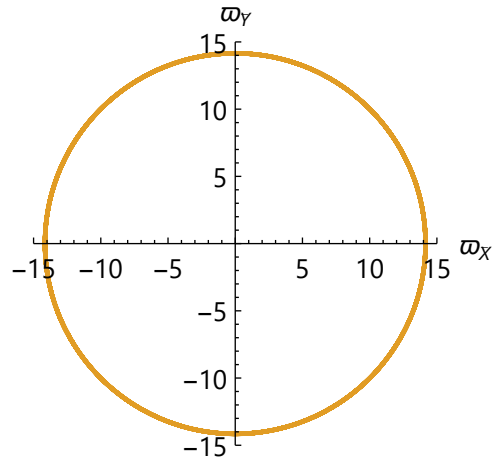
(a) Trayectoria y líneas de corriente<sup>a</sup>:  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$   
Extracto de figuras A.241 y A.245 del anexo



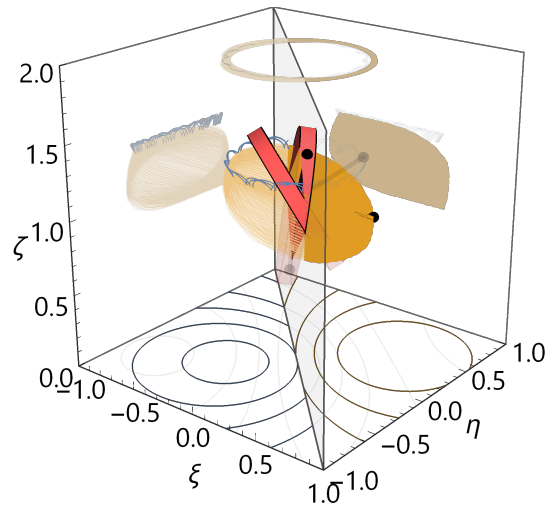
(b) Velocidad de rotación eje  $\bar{Y}$  frente eje  $\bar{X}$ :  
 $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$



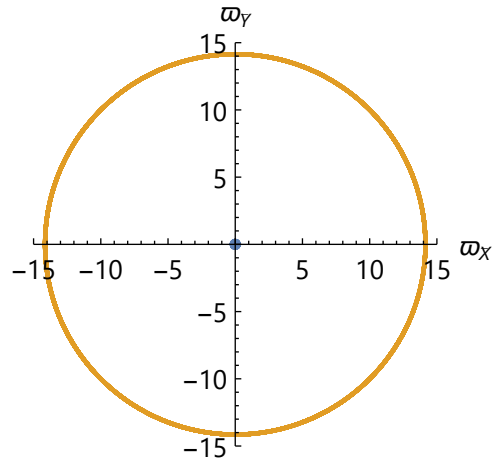
(c) Trayectoria y líneas de corriente<sup>a</sup>:  $\kappa_{\bar{Z}}(0) = 1$   
Extracto de figuras A.295 y A.299 del anexo



(d) Velocidad de rotación eje  $\bar{Y}$  frente eje  $\bar{X}$ :  
 $\kappa_{\bar{Z}}(0) = 1$



(e) Trayectoria y líneas de corriente<sup>a</sup>:  $\kappa_{\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$   
Extracto de figuras A.349 y A.353 del anexo



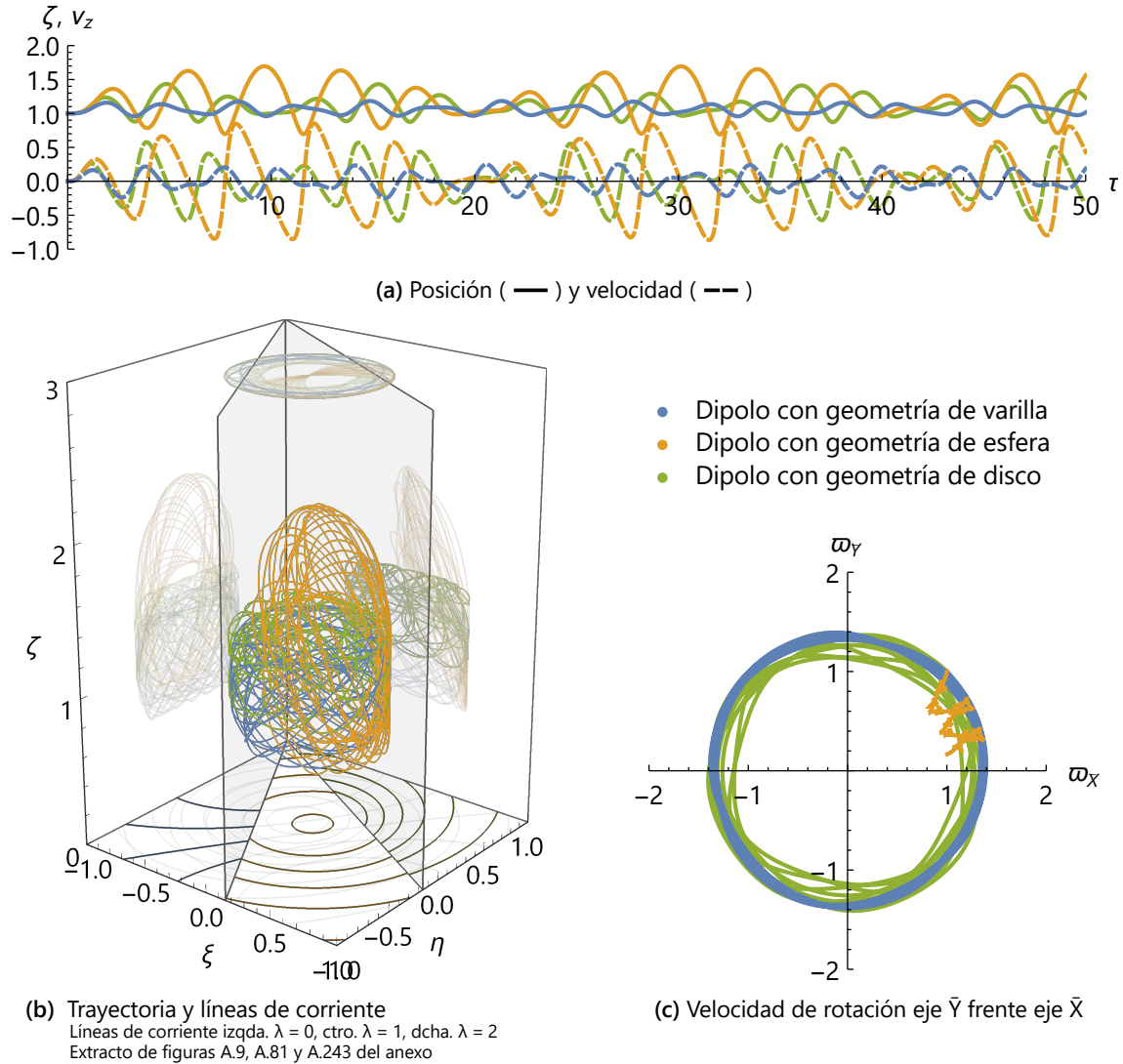
(f) Velocidad de rotación eje  $\bar{Y}$  frente eje  $\bar{X}$ :  
 $\kappa_{\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$

**Figura 5.7** Trayectoria y velocidad de rotación ejes  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$ :  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X}, \bar{Y}}(0) = \{0, 10\}$

<sup>a</sup> Representación izqda.  $\varpi_{\bar{X}, \bar{Y}}(0) = 0$ , dcha.  $\varpi_{\bar{X}, \bar{Y}}(0) = 10$

## 5.2 Comparación según la geometría del dipolo

### 5.2.1 Dipolo con orientación inicial horizontal



**Figura 5.8** Comparación según geometría:  $\lambda = \{0,1,2\}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

En la figura 5.8 se muestra la evolución de la posición y velocidad (figura 5.8a), velocidad de rotación (figura 5.8c) y trayectoria (figura 5.8b) del polo (+) de un dipolo con orientación inicial horizontal (para diferentes geometrías) cuyos valores extremos se incluyen en la tabla 5.1.

Orientación inicial del dipolo	Geometría del dipolo		
Horizontal	• Varilla: $\lambda = 0$	• Esfera: $\lambda = 1$	• Disco: $\lambda = 2$
Posición cdm: $\zeta$	[0.96, 1.18]	[0.69, 1.69]	[0.87, 1.43]
Velocidad cdm: $v_z$	(-0.25, 0.25)	(-0.87, 0.88)	(-0.57, 0.57)
Desplazamiento x polo (+): $\xi$	[-0.49, 0.50]	(-0.13, 0.50]	(-0.50, 0.50]
Desplazamiento y polo (+): $\eta$	[-0.49, 0.50]	(-0.48, 0.43]	(-0.50, 0.50]
Orientación: $\theta$ [°]	[-40.79, 40.57]	[-17.71, 90.00]	(-10.63, 57.04]
Velocidad rotación eje $\bar{X}$ : $\varpi_{\bar{X}}$	(-1.39, 1.39)	[0.82, 1.38]	(-1.40, 1.38)
Velocidad rotación eje $\bar{Y}$ : $\varpi_{\bar{Y}}$	(-1.38, 1.38)	(-0.47, 1.00]	(-1.35, 1.40)

**Tabla 5.1** Valores máximos según geometría:  $\lambda = \{0,1,2\}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

Orientación inicial del dipolo	Geometría del dipolo		
	• Varilla: $\lambda = 0$	• Esfera: $\lambda = 1$	• Disco: $\lambda = 2$
Horizontal			
Variación posición cdm: $\Delta\zeta$	0.22	1.00	0.56
Variación velocidad cdm: $\Delta v_z$	0.50	1.75	1.14
Variación desplazamiento x polo (+): $\Delta\xi$	0.99	0.63	1.00
Variación desplazamiento y polo (+): $\Delta\eta$	0.99	0.91	1.00
Variación orientación: $\Delta\theta [^\circ]$	81.36	107.71	67.67
Variación velocidad rotación eje $\bar{X}$ : $\Delta\varpi_{\bar{X}}$	2.78	2.20	2.78
Variación velocidad rotación eje $\bar{Y}$ : $\Delta\varpi_{\bar{Y}}$	2.76	1.47	2.75

**Tabla 5.2** Variación según geometría:  $\lambda = \{0,1,2\}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

En la tabla 5.2 se observan las variaciones de cada uno de los parámetros recogidos durante la simulación, para las diferentes geometrías consideradas.

El dipolo con geometría de esfera ( $\lambda = 1$ ) es el que más oscila y con mayor velocidad, seguido por el dipolo con geometría de disco ( $\lambda = 2$ ) y, por último, el dipolo con geometría de varilla ( $\lambda = 0$ ).

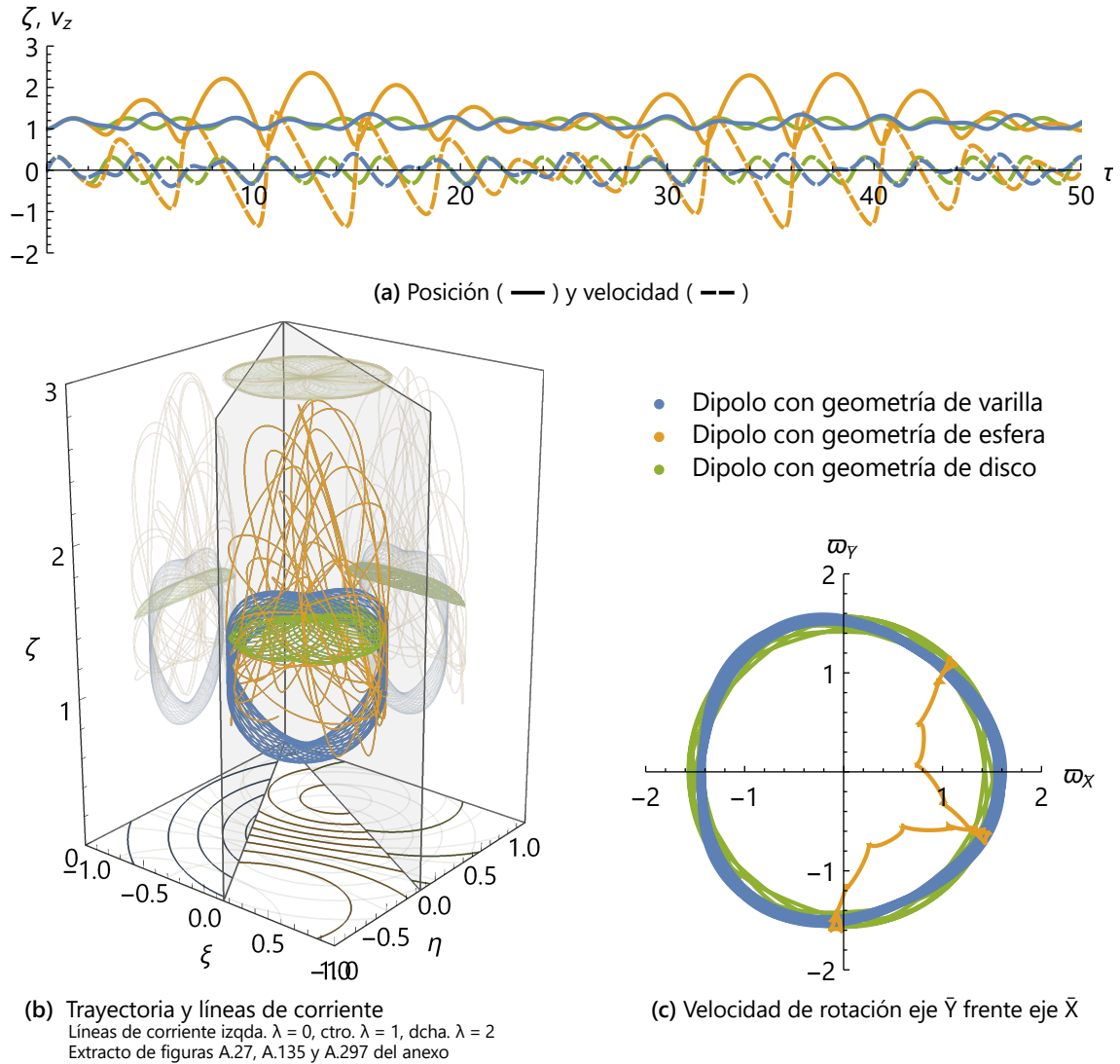
Asimismo, la posición en torno a la cual oscila varía, de forma que, el dipolo con geometría de varilla ( $\lambda = 0$ ) oscila alrededor de la posición menos elevada; seguido por el dipolo con orientación inicial de disco ( $\lambda = 2$ ) y, por último, el dipolo con geometría de esfera ( $\lambda = 1$ ).

La trayectoria descrita por estos dipolos es, aproximadamente circular, alrededor del eje vertical  $\zeta$  en el sistema de referencia fijo en el caso de los dipolos con geometría de varilla ( $\lambda = 0$ ) y de disco ( $\lambda = 2$ ); mientras que, en el dipolo con geometría de esfera ( $\lambda = 1$ ), la trayectoria seguida es más alargada y con una proyección horizontal contenida en un sector del espacio más contenido, de modo que no llega a rotar por completo alrededor del eje vertical  $\zeta$  en el sistema de referencia fijo.

El dipolo con geometría de esfera ( $\lambda = 1$ ) es el que presenta una mayor variación en su orientación, seguido por el dipolo con geometría de varilla ( $\lambda = 0$ ) y, por último, el dipolo con geometría de disco ( $\lambda = 2$ ).

La velocidad de rotación  $\varpi_{\bar{Y}}$  frente a la velocidad de rotación  $\varpi_{\bar{X}}$  genera una figura circular en los dipolos con geometría de varilla ( $\lambda = 0$ ) y disco ( $\lambda = 2$ ), con mayor dispersión en las curvas trazadas en este último. Sin embargo, en el dipolo con geometría de esfera ( $\lambda = 1$ ), esta relación de velocidades de rotación describe un patrón estrellado en torno a un arco de circunferencia, el cual es completado de manera más pausada que el resto. En el instante de representación, este no ha descrito una circunferencia completa, mientras que en el resto de los casos han trazado varias.

## 5.2.2 Dipolo con orientación inicial vertical



**Figura 5.9** Comparación según geometría:  $\lambda = \{0,1,2\}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{Z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

En la figura 5.9 se muestra la evolución temporal de la posición y velocidad (figura 5.9a), velocidad de rotación (figura 5.9c) y trayectoria del polo (+) (figura 5.9b) de un dipolo con orientación inicial vertical, para diferentes geometrías (varilla, esfera y disco).

En la tabla 5.3 se indican los valores extremos alcanzados durante la simulación del sistema, para cada una de las geometrías del dipolo consideradas en la representación de la figura 5.9.

Orientación inicial del dipolo	Geometría del dipolo		
	● Varilla: $\lambda = 0$	● Esfera: $\lambda = 1$	● Disco: $\lambda = 2$
Vertical			
Posición cdm: $\zeta$	[1.00, 1.36]	[0.60, 2.34]	[1.00, 1.26]
Velocidad cdm: $v_z$	(-0.39, 0.37]	(-1.40, 1.39)	(-0.31, 0.32)
Desplazamiento x polo (+): $\xi$	[-0.35, 0.35]	(-0.50, 0.50)	[-0.48, 0.46]
Desplazamiento y polo (+): $\eta$	[-0.35, 0.35]	(-0.49, 0.49]	(-0.49, 0.47]
Orientación: $\theta[^\circ]$	[-89.58, 90.00]	(-25.15, 90.00]	[13.74, 90.00]
Velocidad rotación eje $\bar{X}$ : $\varpi_{\bar{X}}$	[-1.47, 1.58]	(-1.50, 1.48]	[-1.55, 1.54]
Velocidad rotación eje $\bar{Y}$ : $\varpi_{\bar{Y}}$	[-1.60, 1.58]	(-1.61, 1.27]	[-1.55, 1.55]

**Tabla 5.3** Valores máximos según geometría:  $\lambda = \{0,1,2\}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{Z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

Orientación inicial del dipolo	Geometría del dipolo		
	• Varilla: $\lambda = 0$	• Esfera: $\lambda = 1$	• Disco: $\lambda = 2$
Variación posición cdm: $\Delta\zeta$	0.36	1.74	0.26
Variación velocidad cdm: $\Delta v_z$	0.76	2.79	0.63
Variación desplazamiento x polo (+): $\Delta\xi$	0.70	1.00	0.94
Variación desplazamiento y polo (+): $\Delta\eta$	0.70	0.98	0.96
Variación orientación: $\Delta\theta [^\circ]$	179.58	115.15	76.26
Variación velocidad rotación eje $\bar{X}$ : $\Delta\varpi_{\bar{X}}$	3.05	2.98	3.09
Variación velocidad rotación eje $\bar{Y}$ : $\Delta\varpi_{\bar{Y}}$	3.18	2.88	3.10

**Tabla 5.4** Variación según geometría:  $\lambda = \{0,1,2\}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

En la tabla 5.4 se observan las variaciones de cada uno de los parámetros recogidos durante la simulación, para las diferentes geometrías consideradas.

El dipolo con geometría de esfera ( $\lambda = 1$ ) es el que más oscila y con mayor velocidad, seguido por el dipolo con geometría de varilla ( $\lambda = 0$ ) y, por último, el dipolo con geometría de disco ( $\lambda = 2$ ).

Asimismo, la posición en torno a la cual oscila varía, de forma que, el dipolo con geometría de disco ( $\lambda = 2$ ) oscila alrededor de la posición menos elevada; seguido por el dipolo con orientación inicial de varilla ( $\lambda = 0$ ) y, por último, el dipolo con geometría de esfera ( $\lambda = 1$ ).

La trayectoria descrita es, aproximadamente circular, alrededor del eje vertical  $\zeta$  en el sistema de referencia fijo para los dipolos con geometría de esfera ( $\lambda = 1$ ) y disco ( $\lambda = 2$ ), mientras que, el dipolo con geometría de varilla ( $\lambda = 0$ ), describe una trayectoria circular sobre un plano vertical, perpendicular al plano superconductor.

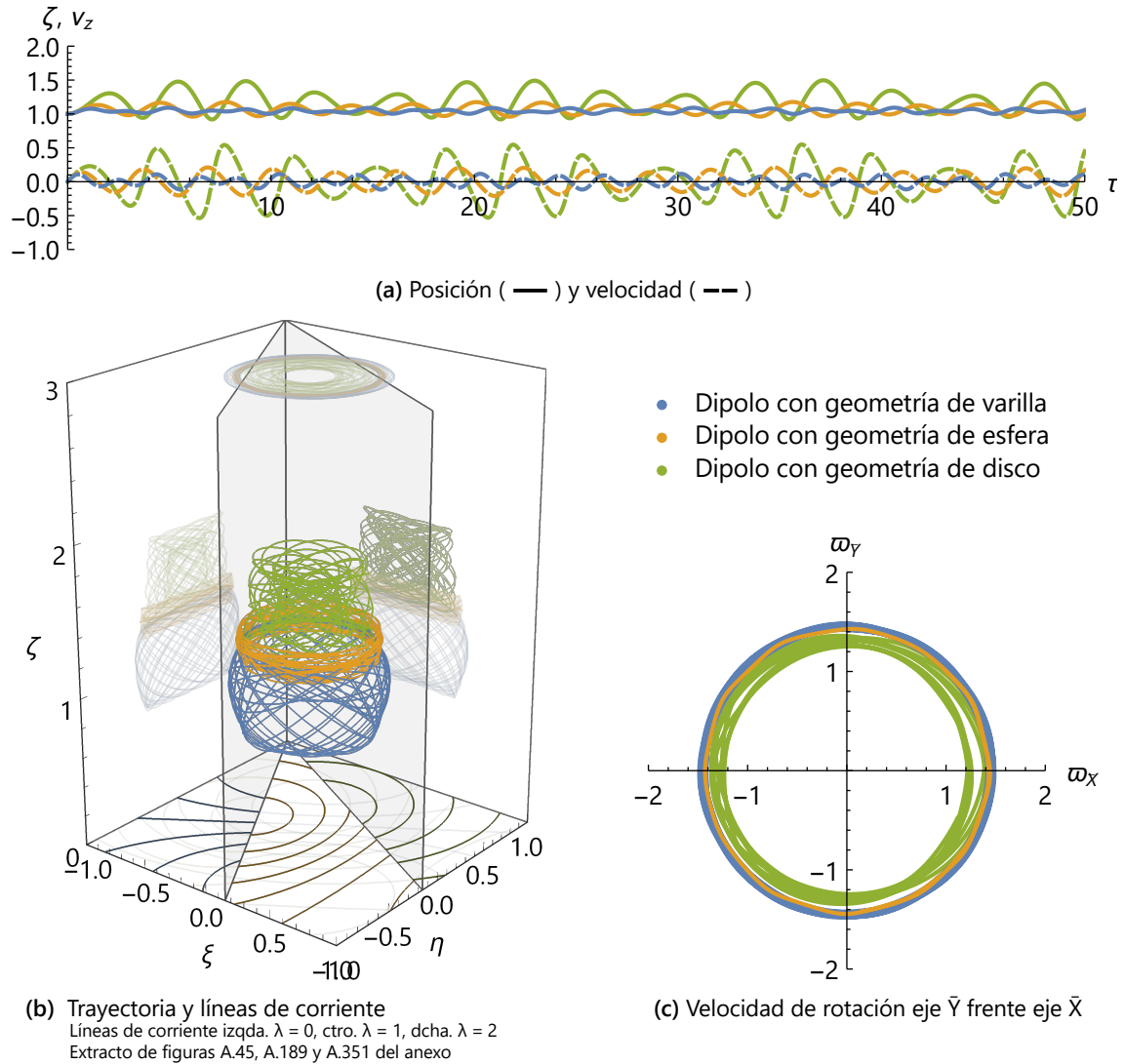
El dipolo con geometría de varilla ( $\lambda = 0$ ) es el que presenta una mayor variación en su orientación, seguido por el dipolo con geometría de esfera ( $\lambda = 1$ ) y, por último, el dipolo con geometría de disco ( $\lambda = 2$ ).

La velocidad de rotación  $\varpi_{\bar{Y}}$  frente a la velocidad de rotación  $\varpi_{\bar{X}}$  genera una figura circular en los dipolos con geometría de varilla ( $\lambda = 0$ ) y disco ( $\lambda = 2$ ), este último con una mayor dispersión en el trazado de las curvas. Sin embargo, en el dipolo con geometría de esfera ( $\lambda = 1$ ), esta relación de velocidades de rotación describe un patrón estrellado alrededor del origen de coordenadas, que es completado más lentamente que el resto (aunque más rápido que en el caso del dipolo con orientación inicial horizontal<sup>a</sup>). En el instante de representación, este no ha descrito una circunferencia completa, mientras que en el resto de los casos han trazado varias circunferencias.

<sup>a</sup> Sección 5.2.1



## 5.2.3 Dipolo con orientación inicial oblicua



**Figura 5.10** Comparación según geometría:  $\lambda = \{0,1,2\}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

En la figura 5.10 se muestra la evolución temporal de la posición y velocidad (figura 5.10a), velocidad de rotación (figura 5.10c) y trayectoria del polo (+) (figura 5.10b) de un dipolo con orientación inicial oblicua, para diferentes geometrías (varilla, esfera y disco).

En la tabla 5.5 se indican los valores extremos alcanzados durante la simulación del sistema, para cada una de las geometrías del dipolo consideradas en la representación de la figura 5.10.

Orientación inicial del dipolo	Geometría del dipolo		
Oblicuo	• Varilla: $\lambda = 0$	• Esfera: $\lambda = 1$	• Disco: $\lambda = 2$
Posición cdm: $\zeta$	[1.00, 1.09]	[0.96, 1.17]	[0.92, 1.51]
Velocidad cdm: $v_z$	(-0.12, 0.12)	(-0.21, 0.21)	(-0.54, 0.54)
Desplazamiento x polo (+): $\xi$	[-0.49, 0.49]	[-0.44, 0.44]	[-0.40, 0.38]
Desplazamiento y polo (+): $\eta$	(-0.49, 0.49)	(-0.45, 0.44)	(-0.41, 0.39)
Orientación: $\theta [^\circ]$	(-35.52, 35.31]	[25.10, 35.26]	[35.26, 71.41]
Velocidad rotación eje $\bar{X}$ : $\varpi_{\bar{X}}$	(-1.48, 1.46]	(-1.44, 1.44]	(-1.33, 1.39]
Velocidad rotación eje $\bar{Y}$ : $\varpi_{\bar{Y}}$	(-1.48, 1.44]	(-1.44, 1.44]	(-1.39, 1.37]

**Tabla 5.5** Valores máximos según geometría:  $\lambda = \{0,1,2\}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



Orientación inicial del dipolo	Geometría del dipolo		
	• Varilla: $\lambda = 0$	• Esfera: $\lambda = 1$	• Disco: $\lambda = 2$
Variación posición cdm: $\Delta\zeta$	0.09	0.21	0.59
Variación velocidad cdm: $\Delta v_z$	0.24	0.42	1.08
Variación desplazamiento x polo (+): $\Delta\xi$	0.98	0.88	0.78
Variación desplazamiento y polo (+): $\Delta\eta$	0.98	0.99	0.80
Variación orientación: $\Delta\theta[^\circ]$	70.83	10.16	36.15
Variación velocidad rotación eje $\bar{X}$ : $\Delta\varpi_{\bar{X}}$	2.94	2.88	2.72
Variación velocidad rotación eje $\bar{Y}$ : $\Delta\varpi_{\bar{Y}}$	2.92	2.88	2.76

**Tabla 5.6** Variación según geometría:  $\lambda = \{0,1,2\}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

En la tabla 5.6 se observan las variaciones de cada uno de los parámetros recogidos durante la simulación, para las diferentes geometrías consideradas.

El dipolo con geometría de disco ( $\lambda = 2$ ) es el que más oscila y con mayor velocidad, seguido por el dipolo con geometría de esfera ( $\lambda = 1$ ) y, por último, el dipolo con geometría de varilla ( $\lambda = 0$ ).

Asimismo, la posición en torno a la cual oscila varía, de forma que, el dipolo con geometría de varilla ( $\lambda = 0$ ) oscila alrededor de la posición menos elevada; seguido por el dipolo con orientación inicial de esfera ( $\lambda = 1$ ) y, por último, el dipolo con geometría de disco ( $\lambda = 2$ ).

La trayectoria descrita por estos dipolos es, aproximadamente circular, alrededor del eje vertical  $\zeta$  en el sistema de referencia fijo, para cualquier geometría: varilla ( $\lambda = 0$ ), esfera ( $\lambda = 1$ ) y disco ( $\lambda = 2$ ).

El dipolo con geometría de varilla ( $\lambda = 0$ ) es el que presenta una mayor variación en su orientación, seguido por el dipolo con geometría de disco ( $\lambda = 2$ ) y, por último, el dipolo con geometría de esfera ( $\lambda = 1$ ).

La velocidad de rotación  $\varpi_{\bar{Y}}$  frente a la velocidad de rotación  $\varpi_{\bar{X}}$  genera una figura circular en los dipolos con las tres geometrías consideradas de manera que, el dipolo con geometría de disco ( $\lambda = 2$ ) es el que presenta una mayor dispersión de las curvas trazadas, seguido por el dipolo con geometría de varilla ( $\lambda = 0$ ) y, por último, el dipolo con geometría de esfera ( $\lambda = 1$ ).



## 6 Movimiento sobre un medio óhmico

En este capítulo se analizan los resultados numéricos cuando el plano sobre el que se deja caer el dipolo es un medio óhmico con cierta resistividad.

Se analiza la evolución de un dipolo magnético con geometría de disco, al variar la altura inicial desde la que cae, para diferentes valores del parámetro que define la intensidad de la conductividad del metal. Por último, se compara la evolución del dipolo cuando la conductividad del plano sobre el que cae es finita y cuando el plano es superconductor, para tres valores distintos de altura inicial.

### 6.1 Descripción del sistema

Considerando un dipolo magnético orientado inicialmente de manera vertical, con rotación inicial y velocidad de rotación nulas, el problema queda determinado por las ecuaciones de cantidad de movimiento que, expresadas en el sistema de referencia  $\{1\}$ , se definen como:

$$\text{Ecuaciones de Newton} \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Big|_1 = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_K \quad (6.1)$$

Teniendo en cuenta que la gravedad únicamente impone una fuerza en dirección vertical, definida en el sistema de referencia  $\{1\}$  como sigue:

$$\mathbf{F}_g = m \mathbf{g} \quad (6.2)$$

las componentes de la ecuación 6.1 son:

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x \quad \text{donde} \quad v_x = \frac{dx}{dt} \quad (6.3)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = F_y \quad \text{donde} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad (6.4)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = -mg + F_z \quad \text{donde} \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (6.5)$$

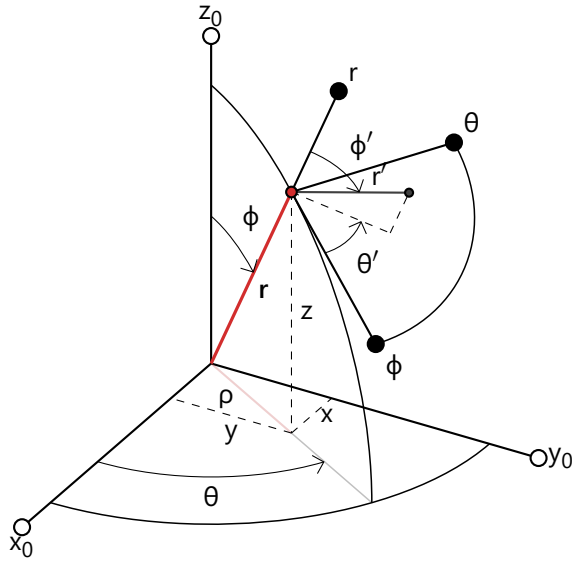
Las ecuaciones que determinan la evolución del dipolo magnético al aproximarse al medio óhmico, caracterizado por un material conductor de espesor reducido, son la siguientes dos ecuaciones de Maxwell:

$$\text{Ley de Gauss para el campo eléctrico} \quad \nabla \cdot \mathbf{D}^a = 0^b \quad (6.6)$$

$$\text{Ley de Lenz-Faraday} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.7)$$

<sup>a</sup> En el espacio libre  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$

<sup>b</sup> Densidad de carga eléctrica nula en el medio  $\rho_E = 0$

Figura 6.1 Sistemas de coordenadas<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Relación entre sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas

Considerando la expresión de la ley de Ohm:

$$\mathbf{J} \equiv \frac{\mathbf{K}}{\delta} = \sigma \mathbf{E} \quad (6.8)$$

las ecuaciones 6.6 y 6.7 se reescriben, en función de la densidad superficial de corriente, mediante coordenadas cilíndricas como:

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho K_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial K_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (6.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{K} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial (\rho K_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial K_\rho}{\partial \theta} \right) = -\sigma \delta v \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (6.10)$$

Dado que únicamente se considera el dipolo con orientación vertical, la distribución de corrientes superficiales  $\mathbf{K}$  adquiere simetría de revolución, luego se cumple la siguiente condición:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad (6.11)$$

Las ecuaciones 6.9 y 6.10 se reescriben como:

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho K_\rho)}{\partial \rho} = 0 \quad (6.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{K} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho K_\theta)}{\partial \rho} = -\sigma \delta v \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (6.13)$$

donde la componente en dirección vertical del sistema de referencia {1} del campo magnético es:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(-\mu z)(-z)}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{\mu}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2z^2 - \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \quad \text{con } \rho^2 = x_0^2 + y_0^2 \quad (6.14)$$

A partir de las ecuaciones 6.12 y 6.13, se infiere que las componentes radial y azimutal de la densidad superficial de corriente se definen como sigue:

$$K_\rho = 0 \quad (6.15)$$

$$K_\theta = -\frac{\sigma \delta v_z}{\rho} \int \frac{\partial B_z}{\partial z} \rho d\rho = \frac{3\mu\mu_0\sigma z\delta v_z}{4\pi\rho} \int \frac{2z^2 - 3\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{7/2}} \rho d\rho = \frac{3\mu\mu_0\sigma\delta\rho z v_z}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \quad (6.16)$$

Utilizando la ecuación 6.8, la potencia disipada se puede expresar de esta manera<sup>[41]</sup>:

$$P_K = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\sigma \delta} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty K_\theta^2 \rho d\rho = \frac{18\mu^2\mu_0^2\sigma\delta z v_z^2}{16\pi} \int_0^\infty \frac{\rho^3}{(\rho^2 + z^2)^5} d\rho = \frac{3\mu_0^2\mu^2\sigma\delta v_z^2}{64\pi z^4} \quad (6.17)$$

a partir de la cual, se obtiene la siguiente expresión de la magnitud de la fuerza disipada:

$$F_K = \frac{P_K}{v_z} = \frac{3\mu_0^2\mu^2\sigma\delta v_z}{64\pi z^4} \quad (6.18)$$

De forma que, esta fuerza se define en dirección vertical en el sistema de referencia  $\{1\}$  y, por ser de origen disipativo, en el mismo sentido que la gravedad:

$$F_K = -\frac{3\mu_0^2\mu^2\sigma\delta v_z}{64\pi z^4} k_1 \quad (6.19)$$

**Tiempo característico**

Definiendo, como referencia, el movimiento de caída libre vertical de una partícula sometida al efecto de la gravedad ( $g$ ) mediante las siguientes ecuaciones expresadas en el sistema de referencia {1}:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g \quad (6.20)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz(0)}{dt} - gt \quad (6.21)$$

$$z = z(0) + \frac{dz(0)}{dt}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (6.22)$$

y considerando una velocidad inicial nula de la partícula:

$$\frac{dz(0)}{dt} = 0 \quad (6.23)$$

a partir de la expresión 6.22, el tiempo característico que tarda en impactar la partícula sobre el plano conductor es:

$$t = \sqrt{\frac{2z(0)}{g}} \quad (6.24)$$

**6.1.1 Sistema de ecuaciones**

El conjunto de ecuaciones que definen el problema como un sistema de primer orden es:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad (6.25)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \quad (6.26)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z \quad (6.27)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad (6.28)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = 0 \quad (6.29)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{3\mu_0^2\mu^2\sigma\delta}{64\pi m} \frac{v_z}{z^4} \quad (6.30)$$

A partir de las ecuaciones 6.28 y 6.29 se obtiene que la velocidad en el plano  $xy$ , respecto al sistema de referencia {1}, se mantiene constante y, por tanto, las ecuaciones que definen el sistema pueden reducirse únicamente a las dos siguientes.

**Sistema de ecuaciones de relevancia**

$$\frac{dz}{dt} = v_z \quad (6.31)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{3\mu_0^2\mu^2\sigma\delta}{64\pi m} \frac{v_z}{z^4} \quad (6.32)$$

### 6.1.2 Adimensionalización de ecuaciones

Las ecuaciones 6.25 a 6.30 que definen el sistema se pueden adimensionalizar usando como base un valor de posición y tiempo de referencia, teniendo en cuenta la relación entre los términos de esta última ecuación:

$$\frac{dv_z}{dt} \sim \frac{v_1}{t_1} \equiv \frac{v_1}{\sqrt{z_1/g}} \sim \frac{3\mu_0^2\mu^2\sigma\delta}{64\pi m} \frac{v_1}{z_1^4} \quad (6.33)$$

de modo que la velocidad y el tiempo de referencia se expresan como:

$$z_1 = \sqrt[7]{\frac{9\mu_0^4\mu^4\sigma^2\delta^2}{4096\pi^2 m^2 g}} \quad (6.34)$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{z_1}{g}} = \sqrt[14]{\frac{9\mu_0^4\mu^4\sigma^2\delta^2}{4096\pi^2 m^2 g^{15}}} \quad (6.35)$$

Sin embargo, se opta por realizar otra adimensionalización distinta, definiendo la posición de equilibrio  $z_0$  en el sistema de referencia  $\{1\}$  y el tiempo de referencia  $t_0$ , como una magnitud derivada de esta, de manera equivalente a la definida en las secciones 4.1.2 o 4.2.2,<sup>a</sup> de tal forma que las variables adimensionales se definen como sigue:

$$z_0 = \sqrt[4]{\frac{3\mu_0\mu^2}{64\pi mg}} \quad (6.36)$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{z_0}{g}} = \sqrt[8]{\frac{3\mu_0\mu^2}{64\pi mg^9}} \quad (6.37)$$

#### Análisis dimensional de variables

Tiempo  $[t] = T$

Posición  $[r] = L$

Velocidad  $\left[\frac{dr}{dt}\right] = LT^{-1}$

$[v] = LT^{-1}$

Aceleración  $\left[\frac{dv}{dt}\right] = LT^{-2}$

#### Adimensionalización usando variables de referencia

$\tau = \frac{t}{t_0}$

$(\xi \ \eta \ \zeta)^T = \frac{1}{z_0} (x \ y \ z)^T$

$\frac{d}{dt}(\xi \ \eta \ \zeta)^T = \frac{t_0}{z_0} \frac{d}{dt}(x \ y \ z)^T \equiv \frac{1}{\sqrt{gz_0}} \frac{d}{dt}(x \ y \ z)^T$

$(v_x \ v_y \ v_z)^T = \frac{t_0}{z_0} (v_x \ v_y \ v_z)^T \equiv \frac{1}{\sqrt{gz_0}} (v_x \ v_y \ v_z)^T$

$\frac{d}{dt}(v_x \ v_y \ v_z)^T = \frac{t_0^2}{z_0} \frac{d}{dt}(v_x \ v_y \ v_z)^T \equiv \frac{1}{g} \frac{d}{dt}(v_x \ v_y \ v_z)^T$

Usando estas relaciones, para adimensionalizar la ecuación 6.30 se define el siguiente parámetro:

• **Parámetro conductivo**  $\alpha = \frac{3\mu_0^2\mu^2\sigma\delta}{64\pi m \sqrt{gz_0^7}}$

el cual se puede relacionar, operando en la expresión anterior, con las posiciones de equilibrio  $z_1$  y  $z_0$  de esta manera:

$$\alpha = \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^{7/2} \quad (6.38)$$

Este parámetro representa la diferencia entre la posición de referencia para adimensionalizar el sistema en el caso del plano conductor y la posición de equilibrio en el caso del plano superconductor.

Puede relacionarse con la conductividad del plano estimando que, cuanto mayor es el valor de este parámetro, menor es la disipación energética por parte del plano conductor y más intenso es el efecto magnético sobre el dipolo.

<sup>a</sup> Para comparar con el caso donde el medio es superconductor

**Tiempo característico adimensional**

Adimensionalizando la expresión 6.24 utilizando como base el tiempo adimensional definido en la expresión 6.37, el tiempo adimensional que tarda la partícula en impactar con el plano conductor es:

$$\tau = \sqrt{2\zeta(0)} \quad (6.39)$$

Este valor será utilizado en las simulaciones realizadas durante el desarrollo de este capítulo como una referencia del tiempo de simulación adimensional necesario para observar las diferencias existentes entre el caso en el que el dipolo magnético situado de manera perpendicular al plano, cae sobre un plano conductor y sobre un plano no conductor.

**6.1.3 Sistema de ecuaciones adimensionales**

El conjunto de ecuaciones adimensionales que definen el problema como sistema de primer orden es:

$$\frac{d\xi}{dt} = v_x \quad (6.40)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = v_y \quad (6.41)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = v_z \quad (6.42)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad (6.43)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = 0 \quad (6.44)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -1 - \alpha \frac{v_z}{\zeta^4} \quad (6.45)$$

A partir de las ecuaciones 6.43 y 6.44 se obtiene que la velocidad en el plano xy, respecto al sistema de referencia {1}, se mantiene constante y, por tanto, las ecuaciones que definen el sistema pueden reducirse únicamente a las dos siguientes.

**Sistema de ecuaciones adimensionales de relevancia**

$$\frac{d\zeta}{dt} = v_z \quad (6.46)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -1 - \alpha \frac{v_z}{\zeta^4} \quad (6.47)$$



## 6.2 Comparación según el valor del parámetro conductivo

### 6.2.1 Parámetro conductivo bajo

En las figuras 6.2 y 6.3 se muestran, respectivamente, la evolución temporal de la posición y velocidad del dipolo al caer sobre un plano no/conductor ( -- / — ) desde diferentes alturas iniciales.

Parámetro conductivo	Altura inicial del dipolo		
$\alpha = 0.1$	$\zeta(0) = 1$	$\zeta(0) = 2$	$\zeta(0) = 4$
Instante de impacto no conductor: $\tau_c$	1.41	2.00	2.83
Velocidad (máx) instante de impacto no conductor: $v_{z,nc}^*$	-1.41	-2.00	-2.83
Posición en instante de impacto $\tau_c$ conductor: $\zeta(\tau_c)$	0.30	0.27	0.24
Velocidad en instante de impacto $\tau_c$ conductor: $v_{z,c}(\tau_c)$	-0.19	-0.23	-0.29
Velocidad máxima conductor: $v_{z,c}^*$	-0.82	-1.54	-2.48

Tabla 6.1 Valores característicos según altura inicial del dipolo

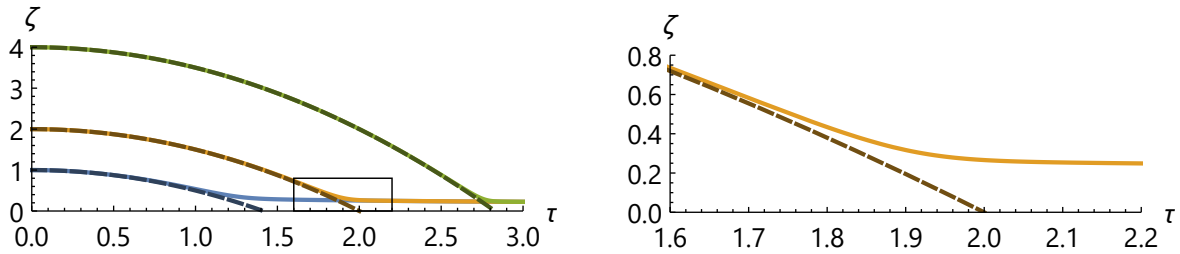


Figura 6.2 Posición del dipolo y detalle en instante de impacto plano no conductor  $\zeta(0) = 2$

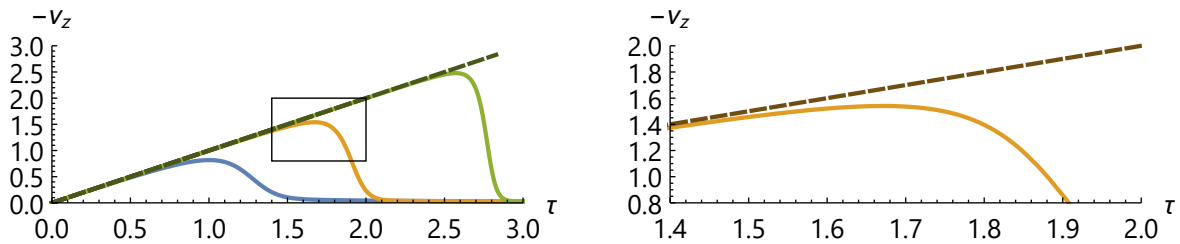


Figura 6.3 Velocidad del dipolo y detalle en instante de máxima velocidad plano conductor  $\zeta(0) = 2$

En la figura 6.4 se representa la posición frente a la velocidad del dipolo al caer sobre un plano de material no/conductor ( -- / — ) desde las diferentes alturas iniciales consideradas.

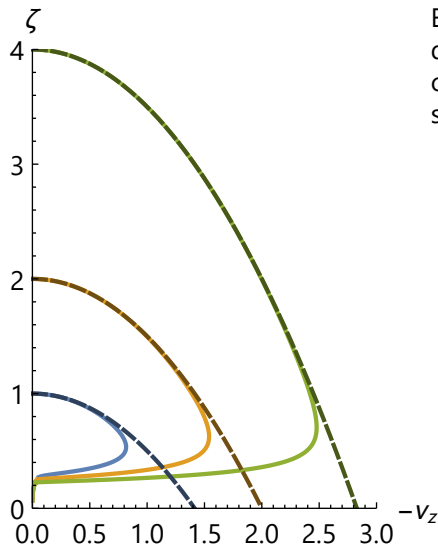


Figura 6.4 Posición frente a la velocidad

En un principio, sea o no conductor el plano sobre el que se deja caer el dipolo, este sigue la misma evolución hasta alcanzar cierta altura sobre el plano, donde aparecen ciertas diferencias según se indica en la tabla 6.1:

- **Posición:** En la figura 6.2 se puede ver que, a medida que la altura inicial es mayor, la altura a la que se encuentra el dipolo en el instante  $\tau_c$  es menor
- **Velocidad:** En la figura 6.3 se puede ver que a medida que la altura inicial es mayor, la celeridad del dipolo es mayor, así como el porcentaje de velocidad máxima en el caso del plano conductor respecto al plano no conductor por la mayor energía potencial
- **Posición frente a la velocidad:** En la figura 6.4 se puede ver que, cuanto mayor es la altura inicial, el comportamiento según el plano sea conductor o no difiere a una altura más elevada, así como que la intensidad del frenado del dipolo es mayor (menor pendiente  $v_z - \zeta$  en el frenado)

## 6.2.2 Parámetro conductivo medio

En las figuras 6.5 y 6.6 se muestran, respectivamente, la evolución temporal de la posición y velocidad del dipolo al caer sobre un plano no/conductor ( -- / — ) desde diferentes alturas iniciales.

Parámetro conductivo	Altura inicial del dipolo		
$\alpha = 1$	• $\zeta(0) = 1$	• $\zeta(0) = 2$	• $\zeta(0) = 4$
Instante de impacto no conductor: $\tau_c$	1.41	2.00	2.83
Velocidad (máx) instante de impacto no conductor: $v_{z,nc}^*$	-1.41	-2.00	-2.83
Posición en instante de impacto $\tau_c$ conductor: $\zeta_c(\tau_c)$	0.59	0.57	0.51
Velocidad en instante de impacto $\tau_c$ conductor: $v_{z,c}(\tau_c)$	-0.16	-0.26	-0.33
Velocidad máxima conductor: $v_{z,c}^*$	-0.42	-1.18	-2.20

Tabla 6.2 Valores característicos según altura inicial del dipolo

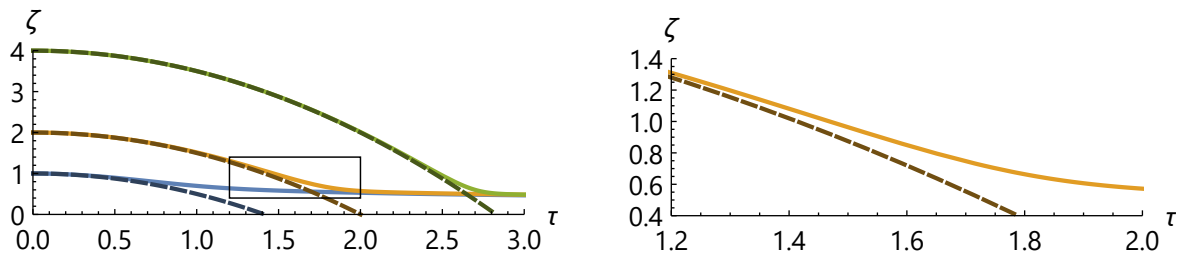


Figura 6.5 Posición del dipolo y detalle  $\zeta(0) = 2$

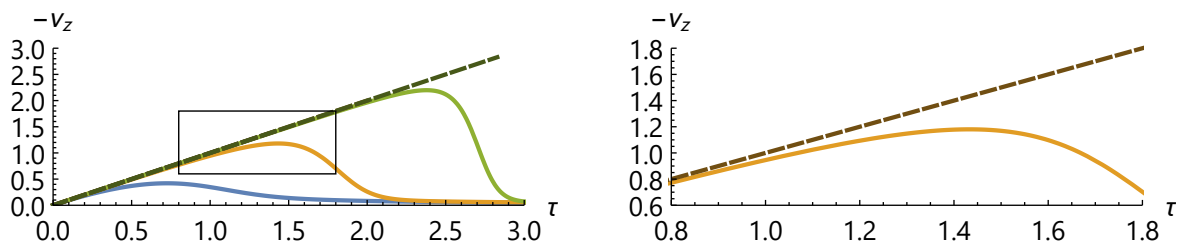


Figura 6.6 Velocidad del dipolo y detalle en instante de máxima velocidad plano conductor  $\zeta(0) = 2$

En la figura 6.7 se representa la posición frente a la velocidad del dipolo al caer sobre un plano de material no/conductor ( -- / — ) desde las diferentes alturas iniciales consideradas.

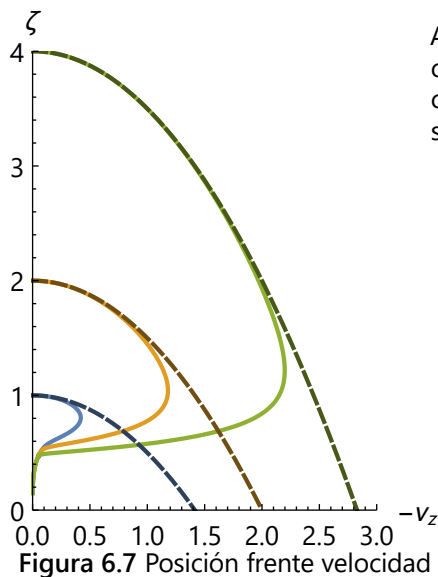


Figura 6.7 Posición frente velocidad

Al comienzo, sea o no conductor el plano sobre el que se deja caer el dipolo, este sigue la misma evolución hasta alcanzar cierta altura sobre el plano, donde aparecen ciertas diferencias según se indica en la tabla 6.2:

- **Posición:** En la figura 6.5 se puede ver que, a medida que la altura inicial es mayor, la altura a la que se encuentra el dipolo en el instante  $\tau_c$  es menor
- **Velocidad:** En la figura 6.6 se puede ver que a medida que la altura inicial es mayor, la celeridad máxima del dipolo y en el instante  $\tau_c$  es mayor debido al aumento de energía potencial
- **Posición frente velocidad:** En la figura 6.7 se puede ver que, cuanto mayor es la altura inicial, el comportamiento según el plano sea conductor o no difiere a una altura más elevada, así como que la intensidad del frenado del dipolo es mayor (menor pendiente  $v_z - \zeta$  en el frenado)

### 6.2.3 Parámetro conductivo alto

En las figuras 6.8 y 6.9 se muestran, respectivamente, la evolución temporal de la posición y velocidad del dipolo al caer sobre un plano no/conductor ( -- / — ) desde diferentes alturas iniciales.

Parámetro conductivo	Altura inicial del dipolo		
$\alpha = 10$	$\zeta(0) = 1$	$\zeta(0) = 2$	$\zeta(0) = 4$
Instante de impacto no conductor: $\tau_c$	1.41	2.00	2.83
Velocidad (máx) instante de impacto $\tau_c$ no conductor: $v_{z,nc}^*$	-1.41	-2.00	-2.83
Posición en instante de impacto $\tau_c$ no conductor: $\zeta_c(\tau_c)$	0.89	1.15	1.10
Velocidad en instante de impacto $\tau_c$ conductor: $v_{z,c}(\tau_c)$	-0.06	-0.23	-0.37
Velocidad máxima conductor: $v_{z,c}^*$	-0.09	-0.63	-1.70

Tabla 6.3 Valores característicos según altura inicial del dipolo

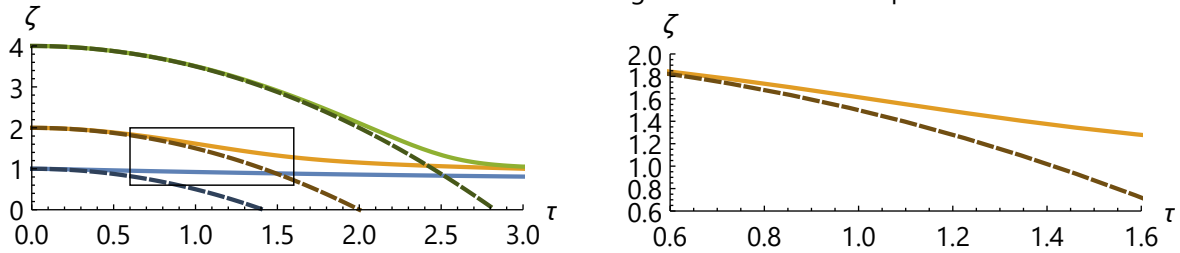


Figura 6.8 Posición del dipolo y detalle  $\zeta(0) = 2$

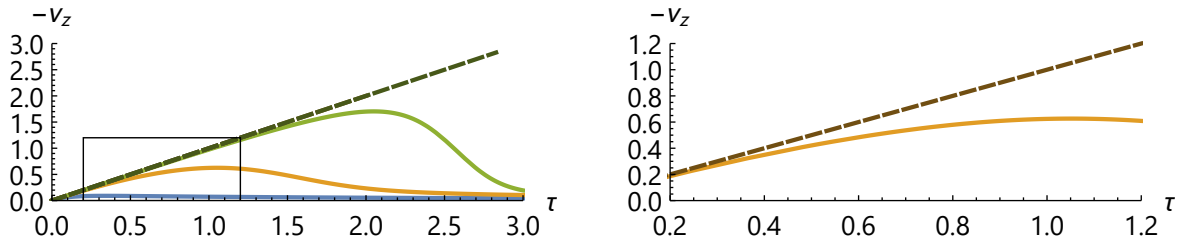


Figura 6.9 Velocidad del dipolo y detalle en instante de máxima velocidad plano conductor  $\zeta(0) = 2$

En la figura 6.10 se representa la posición frente a la velocidad del dipolo al caer sobre un plano de material no/conductor ( -- / — ) desde las diferentes alturas iniciales consideradas.

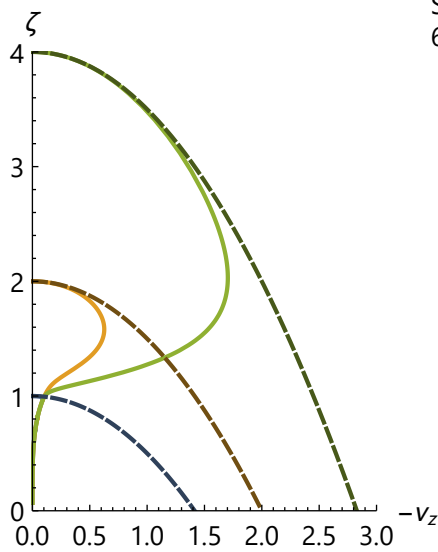


Figura 6.10 Posición frente a la velocidad

Según las figuras anteriores y los valores mostrados en la tabla 6.3 se observan las siguientes diferencias:

- **Posición:** En la figura 6.8 se puede ver que para  $\zeta(0) = 1$  el dipolo se encuentra desde el principio bajo la influencia de la gran intensidad del plano conductor, mientras que en las otras dos alturas iniciales a medida que la altura inicial es mayor, la altura a la que se encuentra el dipolo en el instante  $\tau_c$  es menor
- **Velocidad:** En la figura 6.9 se puede ver que a medida que la altura inicial es mayor, también lo es la celeridad máxima del dipolo y en el instante  $\tau_c$  debido al aumento de energía potencial
- **Posición frente a la velocidad:** En la figura 6.10 se puede ver que, cuanto mayor es la altura inicial, el comportamiento según el plano sea conductor o no difiere a una altura más elevada. Cuanto más alto se deja caer el dipolo más intenso es el frenado cerca del plano conductor (menor pendiente  $v_z - \zeta$  tras alcanzar la máxima velocidad)

### 6.3 Comparación del movimiento sobre un medio óhmico y uno superconductor

En esta sección se compara la evolución de un dipolo, considerando diferentes alturas iniciales desde la cual se deja caer teniendo en cuenta, a su vez, diferentes propiedades del medio sobre el que cae:

#### Altura inicial

- Baja (menor que posición de equilibrio):  $\zeta(0) = 0.75$
- Media (algo mayor que posición de equilibrio):  $\zeta(0) = 1.5$
- Alta (mucho mayor que posición de equilibrio):  $\zeta(0) = 3$

#### Tipo de material del plano

- No conductor
- Conductor
- Superconductor

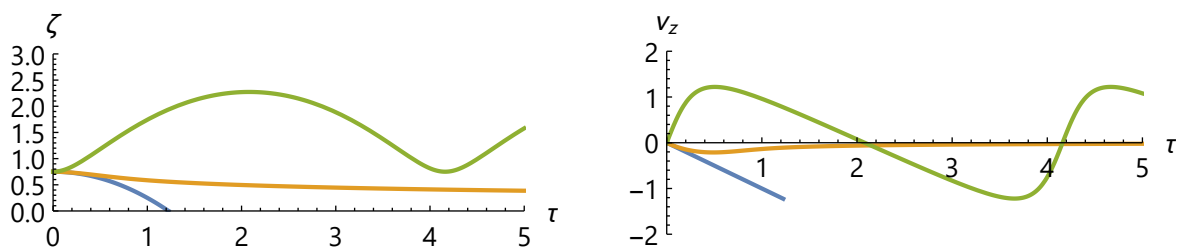
#### 6.3.1 Altura inicial baja

En la tabla 6.4 se indican algunos valores de relevancia, de la simulación realizada, donde se compara la evolución temporal del dipolo al caer desde una altura inicial, menor a la posición de equilibrio, sobre planos: sin propiedades conductivas, conductor y superconductor, respectivamente.

Altura inicial	Tipo de material del plano		
$\zeta(0) = 0.75$	• No conductor	• Conductor	• Superconductor
Instante de impacto: $\tau_c$	1.22	$\rightarrow \infty$	—
Velocidad máxima: $v_z^*$	-1.22	-0.21	$\pm 1.22$

**Tabla 6.4** Valores característicos según propiedades del plano

En la figura 6.11 se observa que el dipolo impacta sobre el plano no conductor debido únicamente al efecto gravitatorio; mientras que, en el medio conductor, el dipolo se frena al acercarse al plano.



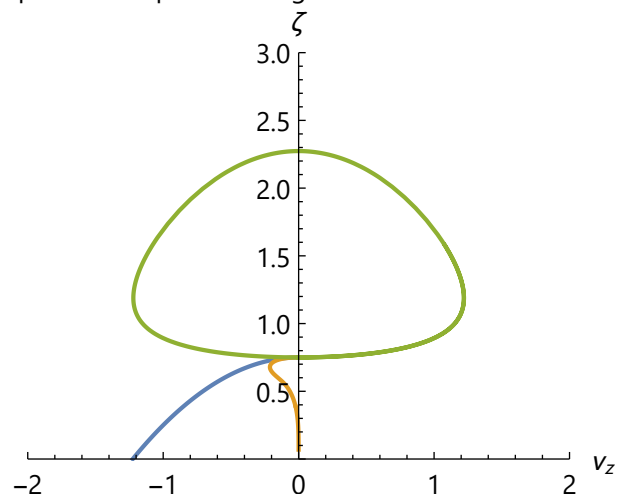
**Figura 6.11** Posición y velocidad del dipolo

Sin embargo, en el medio superconductor, el dipolo oscila respecto a su posición de equilibrio, de manera indefinida puesto que se considera que no aparecen disipación energética.

En la figura 6.12 se representa la posición frente a la velocidad del dipolo. Para el medio no conductor, el dipolo sigue una trayectoria parabólica hasta llegar al plano.

Cuando el dipolo cae sobre un medio conductor, este desciende inicialmente siguiendo esta misma trayectoria hasta alcanzar cierta altura sobre el plano, donde el dipolo se frena y continúa descendiendo lentamente.

En el caso de que el medio sea superconductor, dado que este inicia el movimiento desde una altura inicial menor a la posición de equilibrio, las corrientes inducidas en este plano provocan una fuerza repulsiva sobre el dipolo que hace que este ascienda hasta alcanzar cierta altura y descienda cíclicamente.



**Figura 6.12** Posición frente velocidad

### 6.3.2 Altura inicial media

En la tabla 6.5 se indican algunos valores de relevancia de la simulación realizada, donde se compara la evolución temporal del dipolo magnético al caer desde una altura inicial ligeramente superior a la posición de equilibrio sobre un plano no conductor, conductor y superconductor, respectivamente.

Altura inicial	Tipo de material del plano		
$\zeta(0) = 1.5$	● No conductor	● Conductor	● Superconductor
Instante de impacto: $\tau_c$	1.73	$\rightarrow \infty$	—
Velocidad máxima: $v_z^*$	-1.73	-0.83	$\pm 0.47$

Tabla 6.5 Valores característicos según propiedades del plano

En la figura 6.13 se observa que, al igual que en el caso anterior, el dipolo impacta sobre el plano no conductor movido únicamente bajo la acción del campo gravitatorio; mientras que, en el medio conductor, el dipolo se frena al encontrarse a una altura del plano similar a la altura inicial anterior. Sin embargo, en el medio superconductor, el dipolo comienza descendiendo debido a que parte de una altura un poco mayor a la posición de equilibrio respecto a la cual oscila indefinidamente.

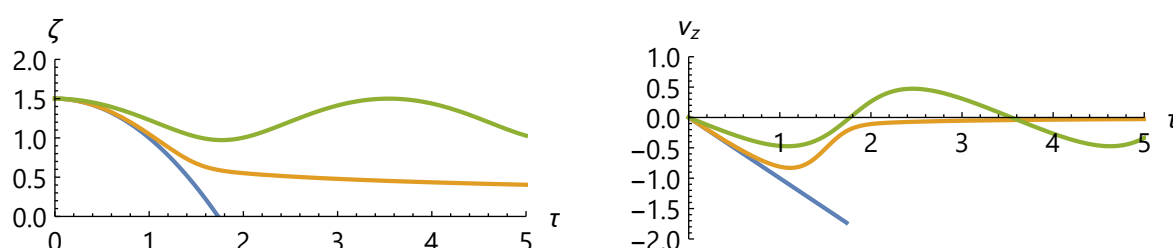


Figura 6.13 Posición y velocidad del dipolo

En la figura 6.14 se representa una combinación de las figuras anteriores, esto es, se muestra la posición frente a la velocidad del dipolo al caer sobre los diferentes planos considerados.

Según se observa en esta figura, del mismo modo que en el caso anterior, cuando el dipolo cae sobre un plano sin propiedades conductoras, este describe una trayectoria parabólica hasta alcanzar el plano en el instante del impacto mostrado en la tabla 6.5, donde la velocidad del mismo es máxima.

En el caso de que el plano sea un medio óhmico, el dipolo se frena tras haber descendido un poco, debido a las corrientes inducidas en el plano cuando el dipolo se encuentra lo suficientemente cerca del mismo, de manera que, el dipolo disminuye bruscamente su velocidad de descenso. A partir de este instante el dipolo sigue descendiendo a un ritmo mucho más lento.

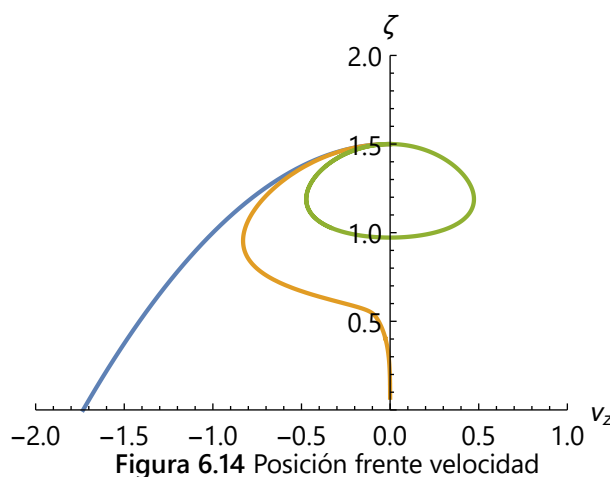


Figura 6.14 Posición frente velocidad

En el caso del material superconductor, el dipolo cae hasta una posición un poco inferior a la posición de equilibrio, donde la fuerza con la que el plano superconductor repele al dipolo es mayor que el peso de este y, por tanto, el dipolo asciende nuevamente alcanzando la altura inicial y completando este movimiento de manera cíclica, debido a que se considera que el plano es un superconductor ideal y no aparecen pérdidas energéticas.

Con este tipo de material, la intensidad de repulsión sobre el dipolo es mucho mayor que en el caso con el plano conductor (donde sí existe disipación) y del plano no conductor (donde la disipación es completa), y por tanto, la velocidad del dipolo es menor en el plano superconductor que en el resto de casos.

### 6.3.3 Altura inicial alta

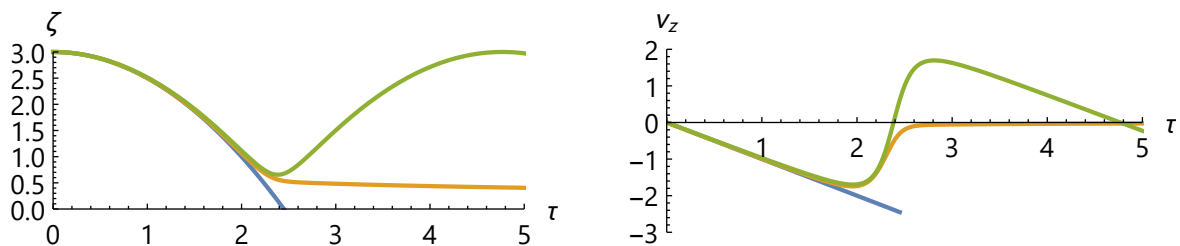
En la tabla 6.6 se indican algunos valores de relevancia de la simulación realizada donde se compara la evolución temporal del dipolo magnético al caer desde una altura inicial bastante mayor que la posición de equilibrio sobre un plano no conductor, conductor y superconductor, respectivamente.

Altura inicial	Tipo de material del plano		
$\zeta(0) = 3$	• No conductor	• Conductor	• Superconductor
Instante de impacto: $\tau_c$	2.45	$\rightarrow \infty$	—
Velocidad máxima: $v_z^*$	-2.45	-1.74	$\pm 1.70$

**Tabla 6.6** Valores característicos según propiedades del plano

En la figura 6.15 se observa que, en el caso del plano no conductor, el dipolo impacta sobre el plano no conductor en el instante de tiempo indicado en la tabla anterior; debido exclusivamente al campo gravitatorio, de forma que la disipación de energía es total. Por otro lado, en el medio conductor, el dipolo no impacta sobre el plano en el instante que lo hace cuando el plano no es conductor, sino que se frena al encontrarse próximo al mismo.

Sin embargo, en el medio superconductor, dado que el dipolo se encuentra en una altura muy alejada de la posición de equilibrio, este comienza descendiendo de la misma forma que en los casos donde el plano no es superconductor, pero finalmente se frena y asciende nuevamente, hasta alcanzar la altura inicial y descender de manera cíclica.



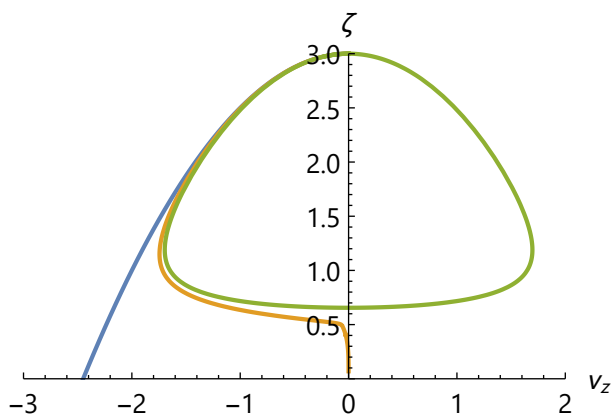
**Figura 6.15** Posición y velocidad del dipolo

En la figura 6.16 se representa la posición del dipolo frente a su velocidad al caer sobre los diferentes planos considerados, desde una altura inicial muy superior a la posición de equilibrio.

Como se observa en las figuras anteriores, debido a la elevada altura inicial del dipolo, el primer tramo de movimiento del dipolo es idéntico en ambas situaciones pero al alcanzar una cierta altura sobre el plano, aparecen las diferencias.

En el caso en el que el plano no es conductor, el dipolo sigue la trayectoria parabólica con la que comienzan los tres escenarios.

Por otra parte, en el caso en el que el medio es óhmico, el dipolo se frena un poco en torno a la mitad de la altura inicial y, nuevamente de manera abrupta en las inmediaciones del plano, a partir de donde sigue cayendo pero mucho más lentamente.



**Figura 6.16** Posición frente velocidad

En el caso del material superconductor, el dipolo alcanza una altura mínima, donde la fuerza de repulsión del plano sobre el dipolo provoca el ascenso de este hasta la altura inicial, completando esta trayectoria de manera indefinida. En esta ocasión, la velocidad del dipolo sobre el plano superconductor es equiparable a la velocidad de este al caer sobre el plano conductor, dado que el efecto magnético en ambos casos entra en juego cuando el dipolo se ha acelerado lo suficiente.

## 7 Conclusiones

---

A lo largo de este trabajo se han desarrollado diversos temas abordados en distintos capítulos, a partir de los cuales se pueden obtener ciertas conclusiones:

- **Capítulo 1: Introducción**  
Presentación de los principios electromagnéticos a utilizar y de los fenómenos de levitación y superconductividad
- **Capítulo 2: Sistema mecánico**  
Definición del sistema de referencia en el cual se formulan las ecuaciones que caracterizan el problema e introducción de las ecuaciones que definen el sistema en términos generales
- **Capítulo 3: Fuerzas y pares sobre un dipolo**  
Definición de las fuerzas y pares aplicados sobre el dipolo magnético, determinados mediante el uso del método de las imágenes
- **Capítulo 4: Ecuaciones de movimiento**  
Definición de las ecuaciones de movimiento que caracterizan el problema a analizar, utilizando dos formulaciones diferentes
- **Capítulo 5: Medio superconductor**  
Resultados obtenidos de las simulaciones numéricas con un dipolo magnético sobre un plano superconductor y comparación de los resultados en función de la geometría del dipolo
- **Capítulo 6: Medio óhmico**  
Resultados obtenidos de las simulaciones numéricas con un dipolo magnético sobre un plano conductor y comparación con los resultados obtenidos en el capítulo anterior

En cuanto a la caracterización del movimiento del dipolo magnético sobre el plano superconductor se ha comprobado que, en ausencia de rotaciones en ejes distintos al de simetría del dipolo, existen posiciones de equilibrio cuando este se orienta paralelo o perpendicular al plano, siendo más elevada la posición de equilibrio del dipolo con orientación vertical.

Los resultados numéricos obtenidos dependen de la geometría del dipolo magnético así como de la orientación inicial del mismo. Cuando la orientación inicial es horizontal o vertical, el dipolo con geometría de esfera oscila bastante más que cuando la geometría de este es similar al de una varilla o un disco; sin embargo, cuando la orientación inicial es oblicua, el dipolo con geometría de esfera es el que presenta una menor variación de su orientación en comparación con el resto de geometrías.

En cualquier caso el movimiento es acotado, es decir, para cualquiera de las condiciones iniciales y valor de las variables introducidas, la posición del dipolo se mantiene dentro de un rango definido.

En relación al movimiento del dipolo sobre el plano conductor se ha comprobado que el dipolo comienza el movimiento de manera equivalente a como lo haría en el caso de que no aparecieran efectos magnéticos; mientras que, cuando se acerca a la superficie del plano conductor, el dipolo se ralentiza hasta el punto de que el impacto con dicho plano ocurre en un tiempo potencialmente infinito.

Esto únicamente tendría validez si el dipolo fuera realmente puntual, puesto que las dimensiones de cualquier dipolo real provocarían que este impactara contra el plano conductor en un tiempo finito.

Al variar la altura inicial desde la que el dipolo, en el medio óhmico no modifica en exceso los resultados obtenidos; mientras que, en el medio superconductor si la altura inicial del dipolo es menor que la de equilibrio, este asciende primero para después caer y, si la altura inicial es mayor que la de equilibrio, el dipolo desciende hasta alcanzar un punto en el que la repulsión del plano provoca su ascenso.





# Apéndice A

## Simulaciones

---

En este apéndice se muestran las simulaciones de la trayectoria seguida por el polo (+) del dipolo magnético así como la posición del cdm de este respecto a su velocidad vertical, realizadas durante el desarrollo del capítulo 5.

Estas simulaciones se encuentran divididas y ordenadas de acuerdo a los siguientes valores de los parámetros y condiciones iniciales que definen el sistema:

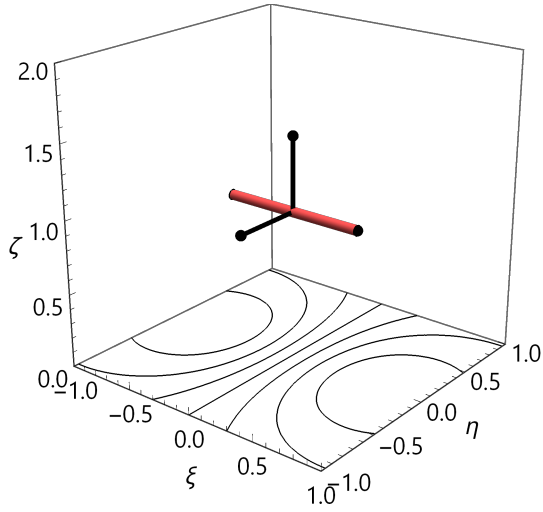
- **Parámetros:** Geometría, intensidad magnética y velocidad de rotación del eje de simetría
  - Geometría: Varilla ( $\lambda = 0$ ), esfera ( $\lambda = 1$ ), disco ( $\lambda = 2$ )
  - Intensidad magnética: Baja ( $\beta = 0$ ), media ( $\beta = 1$ ), alta ( $\beta = 10$ )
  - Velocidad rotación eje  $\bar{Z}$ : Baja ( $\Omega = 0$ ), media ( $\Omega = 1$ ), alta ( $\Omega = 10$ )
- **Condiciones iniciales:** Orientación y velocidad de rotación de los ejes de no simetría iniciales
  - Orientación inicial: Horizontal ( $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ), vertical ( $\kappa_{\bar{Z}}(0) = 1$ ), oblicuo ( $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ )
  - Velocidad inicial rotación ejes  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$ : Baja ( $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$ ), media ( $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$ ), alta ( $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$ )

donde algunas de las variables que determinan las condiciones iniciales del sistema permanecen constantes para todas las simulaciones:

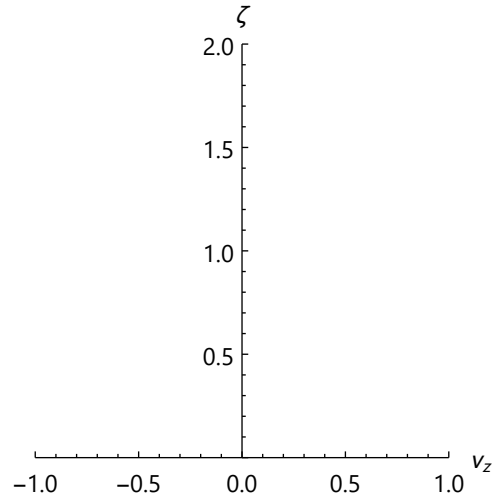
- **Condiciones iniciales invariables:** Altura y velocidad iniciales
  - Altura inicial: Unidad ( $\zeta(0) = 1$ )
  - Velocidad inicial: Nula ( $v_z(0) = 0$ )



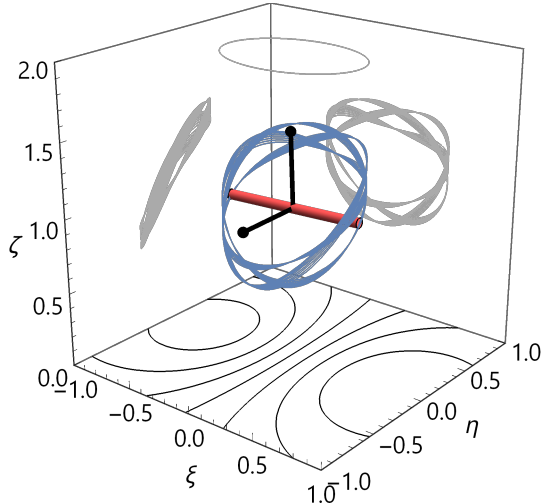
## A.1 Dipolo magnético con geometría de varilla



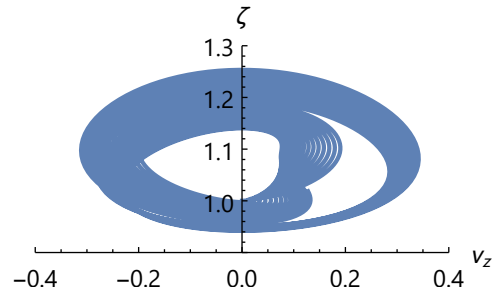
**Figura A.1** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



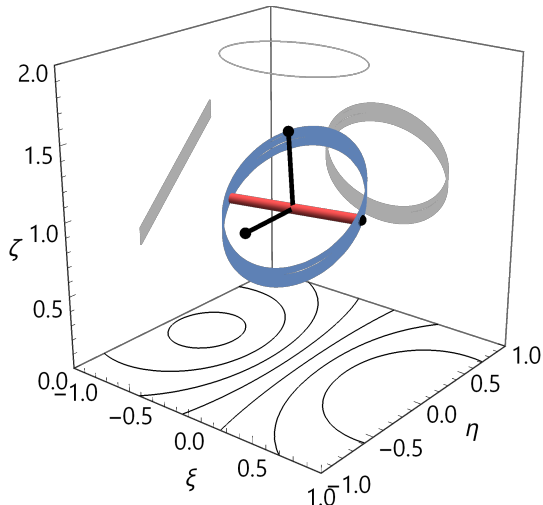
**Figura A.2** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



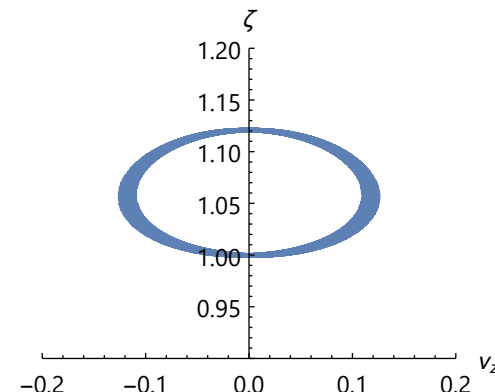
**Figura A.3** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



**Figura A.4** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

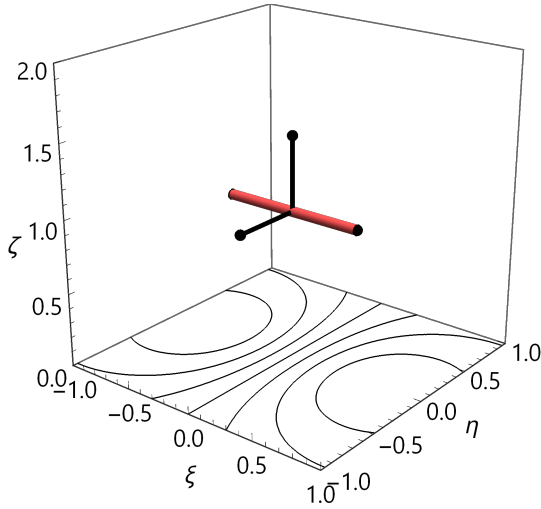


**Figura A.5** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$

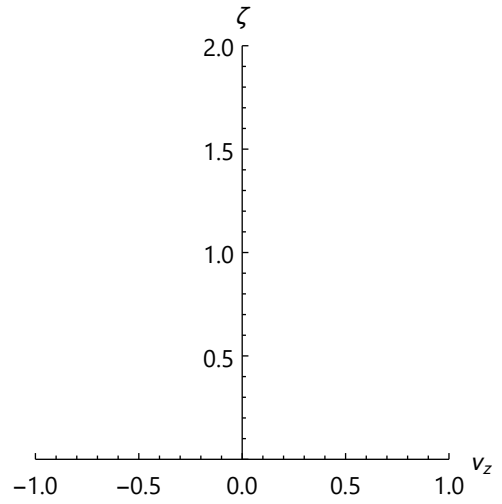


**Figura A.6** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$

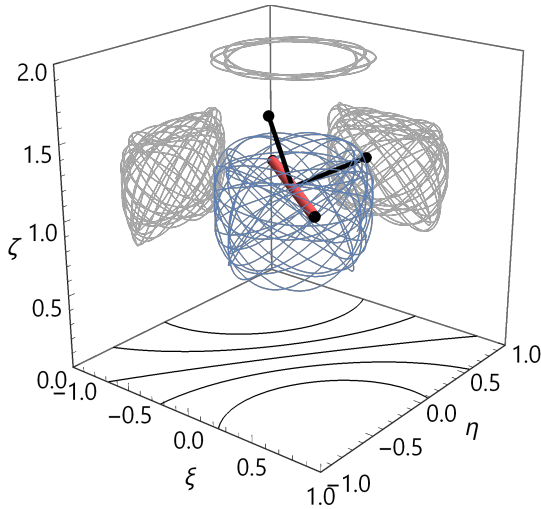
<sup>a</sup> Representación equivalente para  $\Omega = \{1, 10\}$



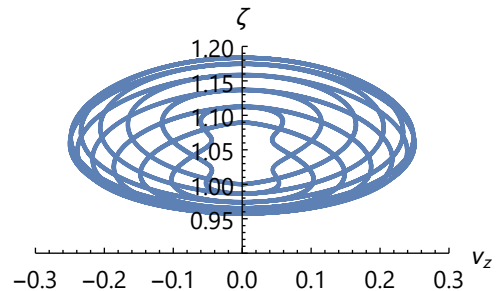
**Figura A.7** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



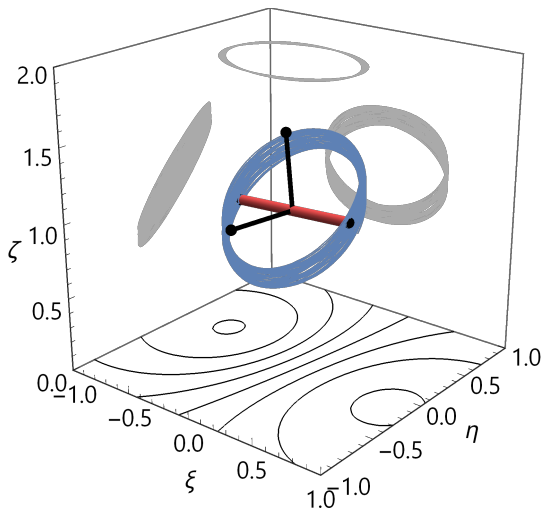
**Figura A.8** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



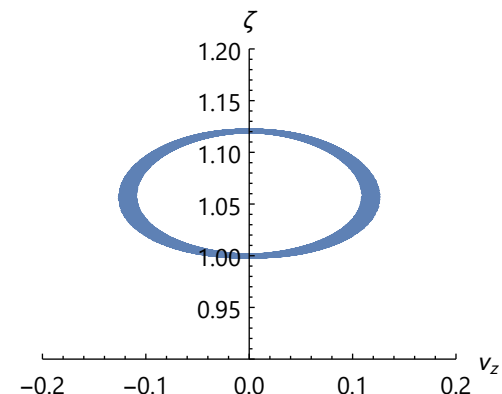
**Figura A.9** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



**Figura A.10** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

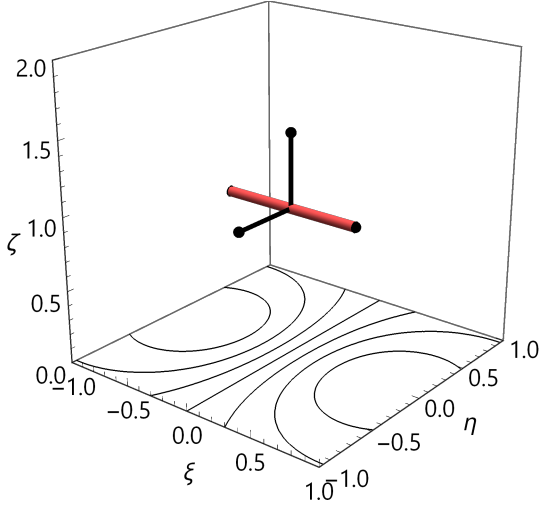


**Figura A.11** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$

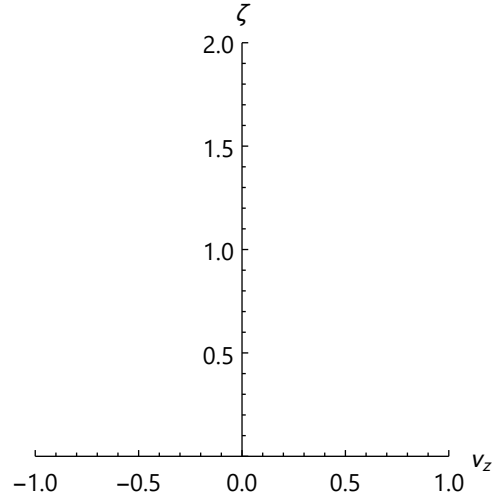


**Figura A.12** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$

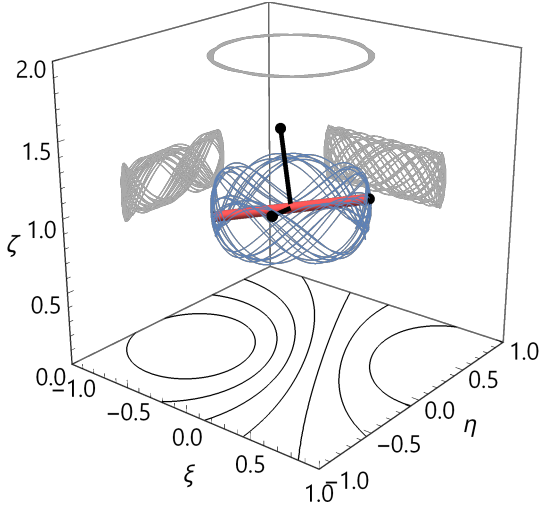
<sup>a</sup> Representación equivalente para  $\Omega = \{1, 10\}$



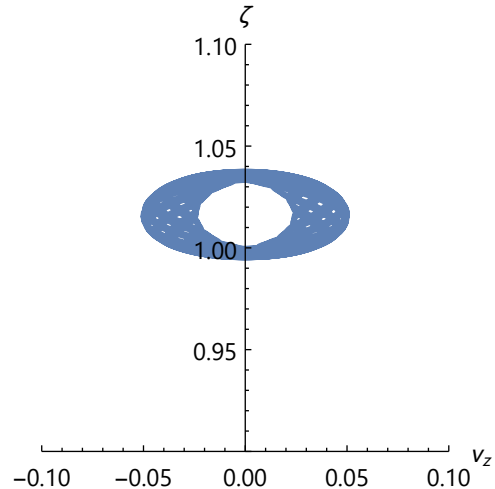
**Figura A.13** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



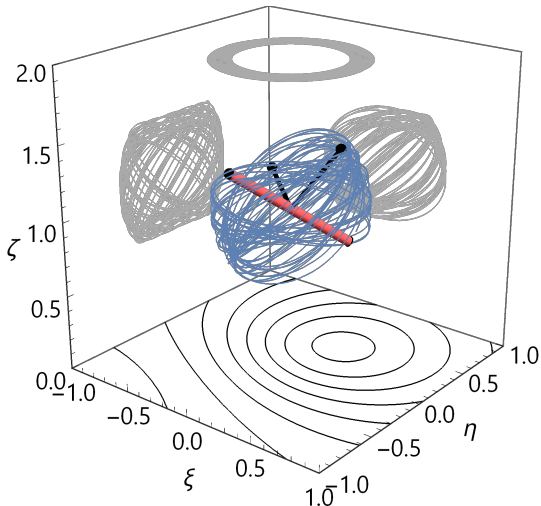
**Figura A.14** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



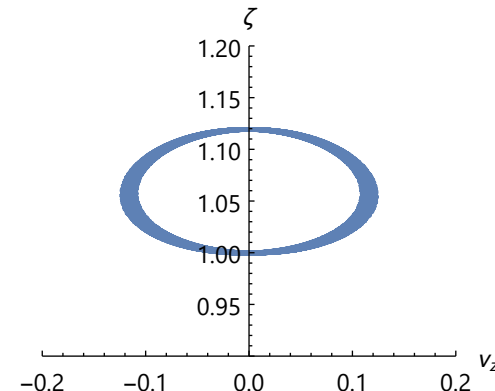
**Figura A.15** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



**Figura A.16** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

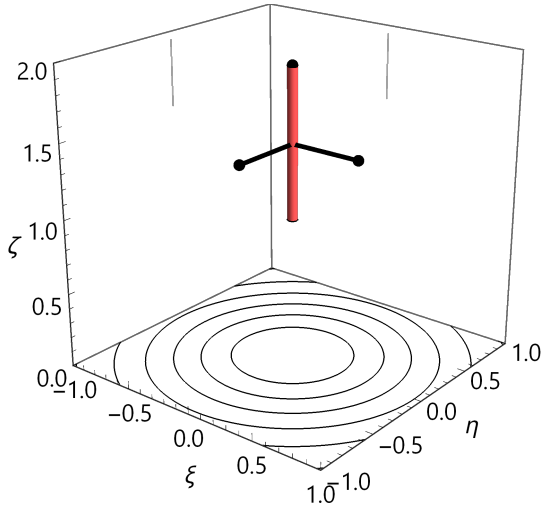


**Figura A.17** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$

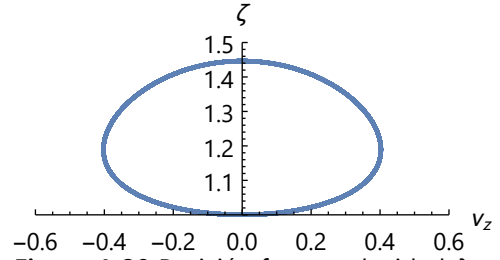


**Figura A.18** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$

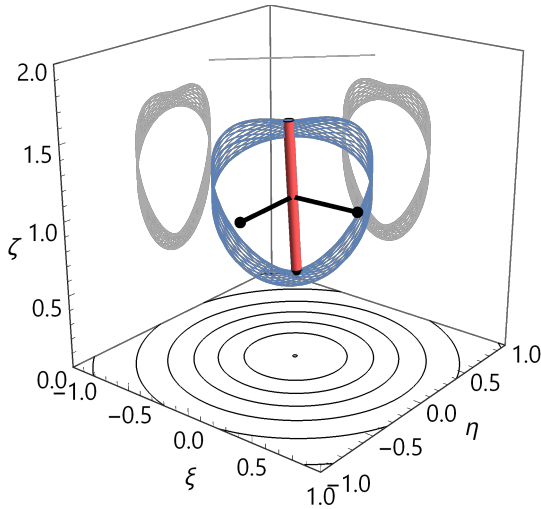
<sup>a</sup> Representación equivalente para  $\Omega = \{1, 10\}$



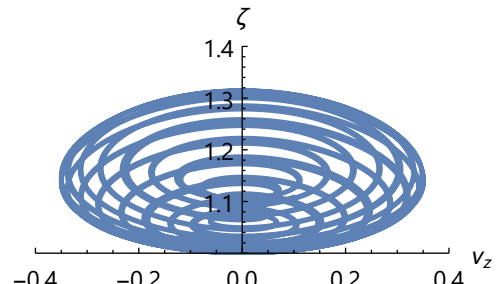
**Figura A.19** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



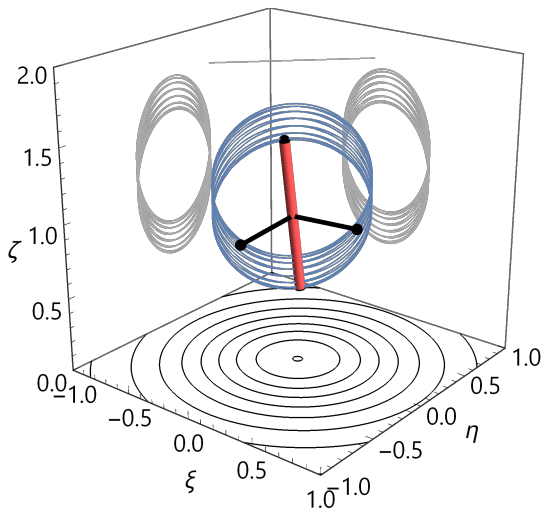
**Figura A.20** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



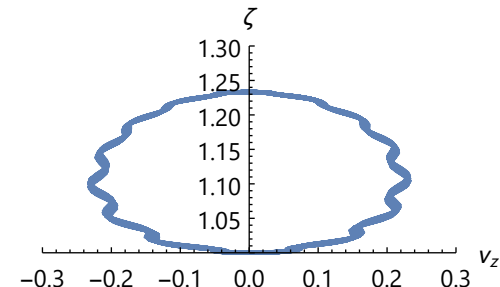
**Figura A.21** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



**Figura A.22** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$

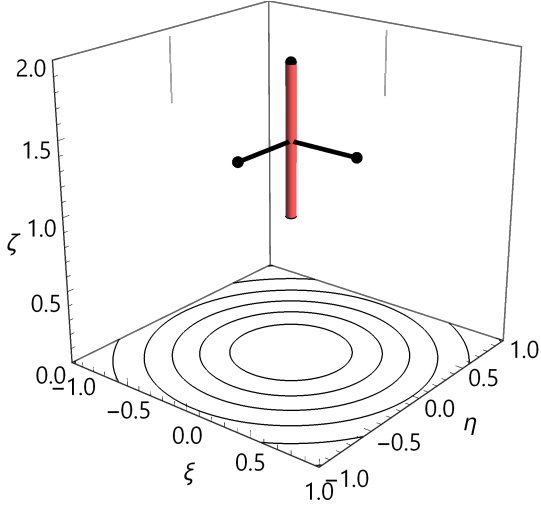


**Figura A.23** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

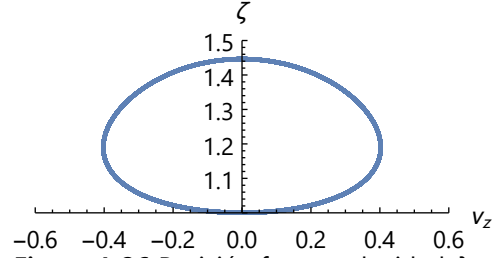


**Figura A.24** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

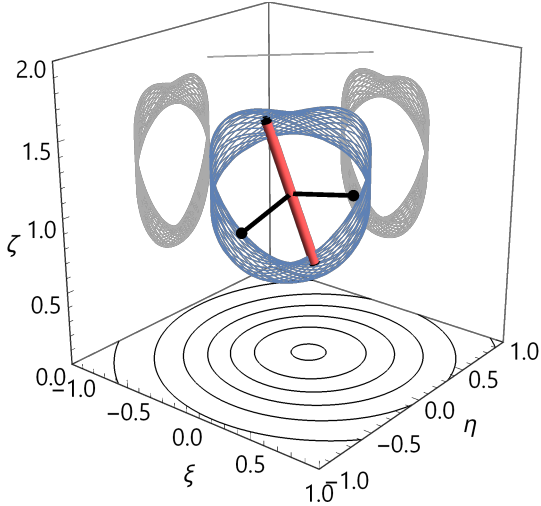
<sup>a</sup> Representación equivalente para  $\Omega = \{1, 10\}$



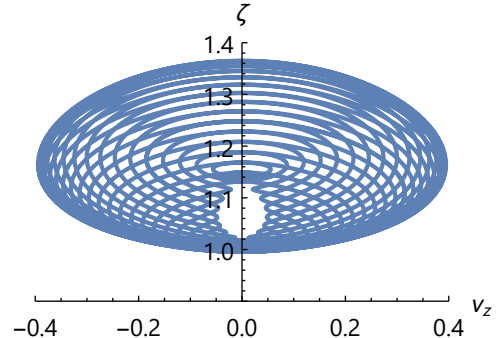
**Figura A.25** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



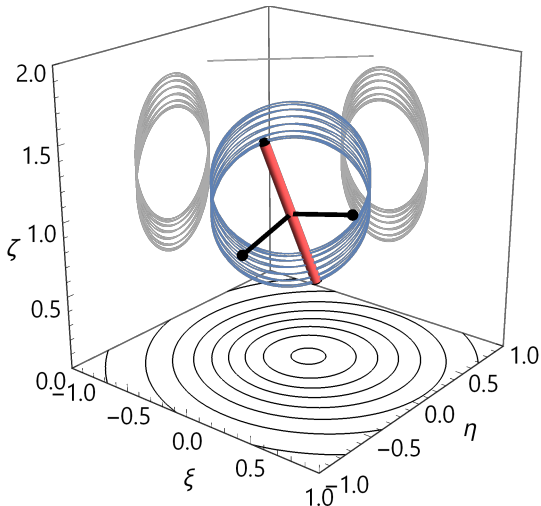
**Figura A.26** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



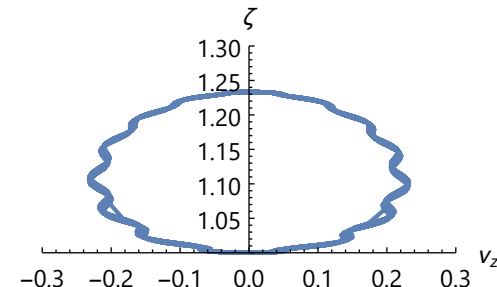
**Figura A.27** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



**Figura A.28** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$

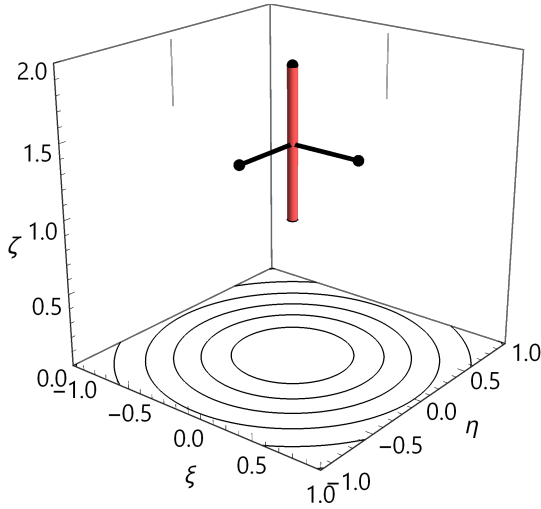


**Figura A.29** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

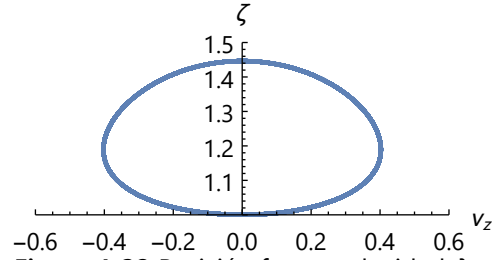


**Figura A.30** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

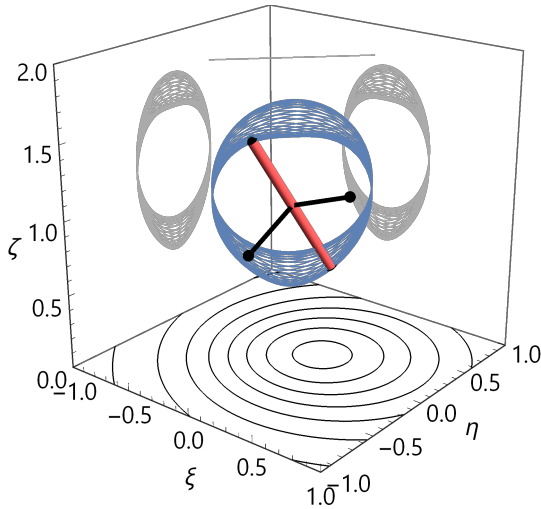
<sup>a</sup> Representación equivalente para  $\Omega = \{1, 10\}$



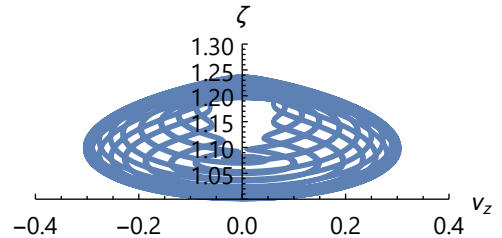
**Figura A.31** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



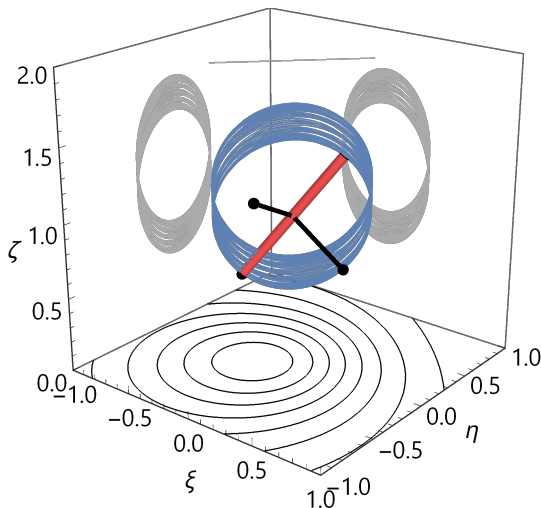
**Figura A.32** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



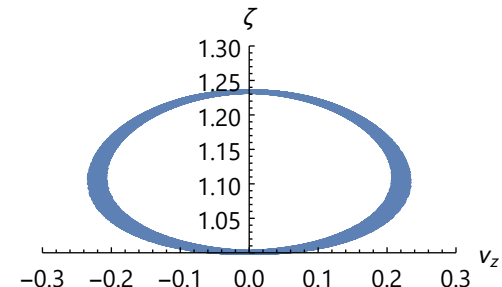
**Figura A.33** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



**Figura A.34** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



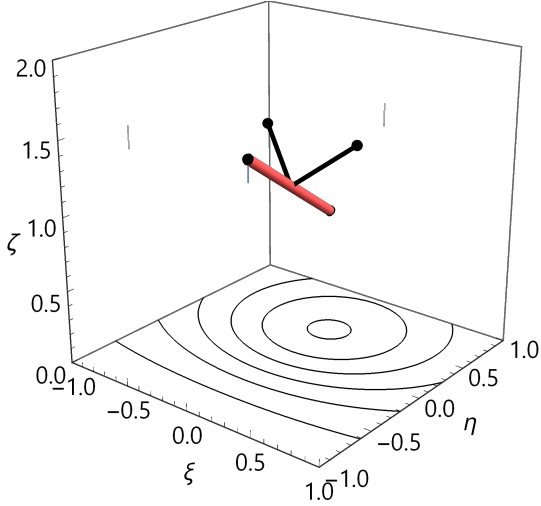
**Figura A.35** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



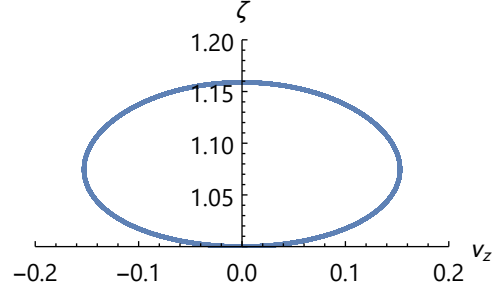
**Figura A.36** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

<sup>a</sup> Representación equivalente para  $\Omega = \{1, 10\}$

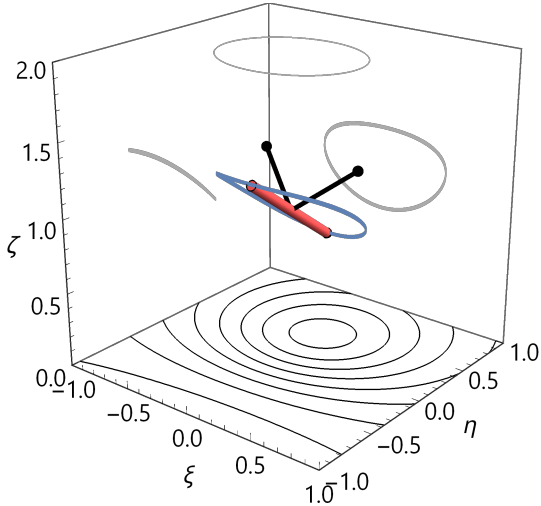




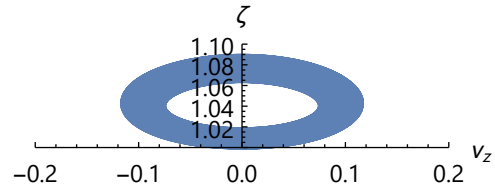
**Figura A.37** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



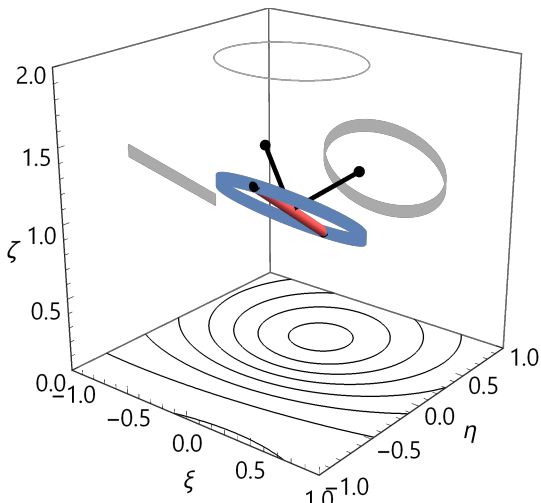
**Figura A.38** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



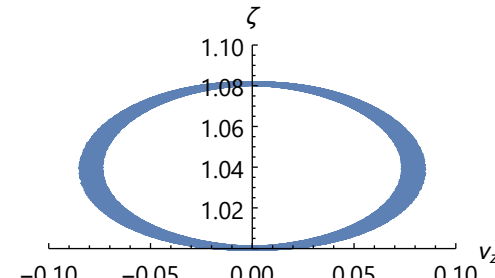
**Figura A.39** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



**Figura A.40** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$

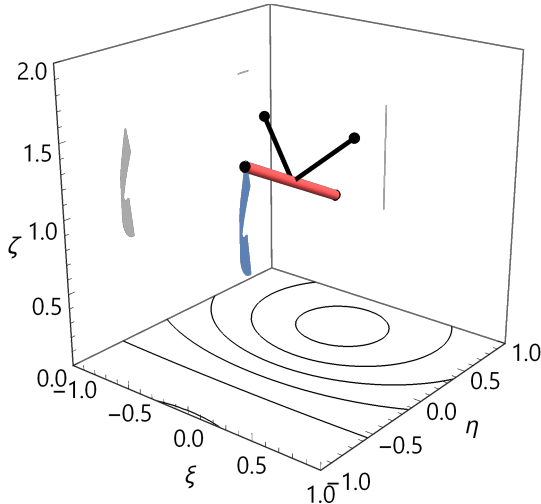


**Figura A.41** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

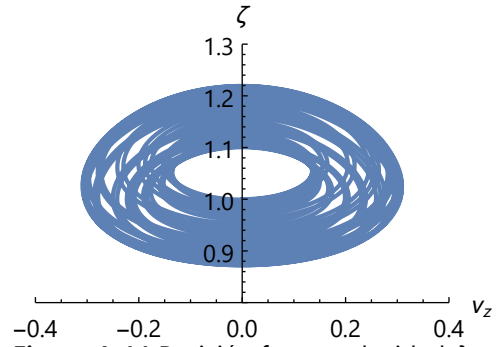


**Figura A.42** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

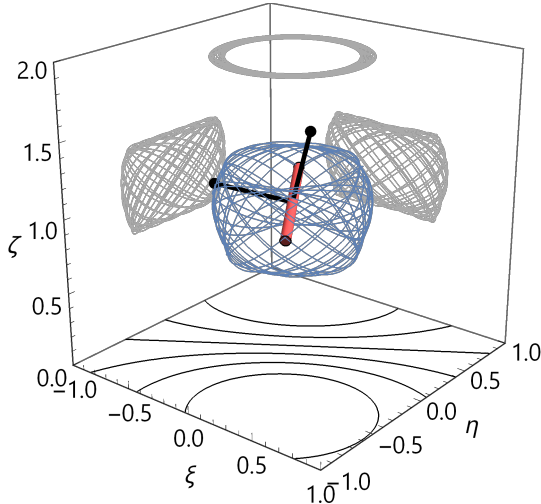
<sup>a</sup> Representación equivalente para  $\Omega = \{1, 10\}$



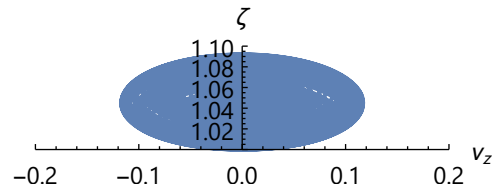
**Figura A.43** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



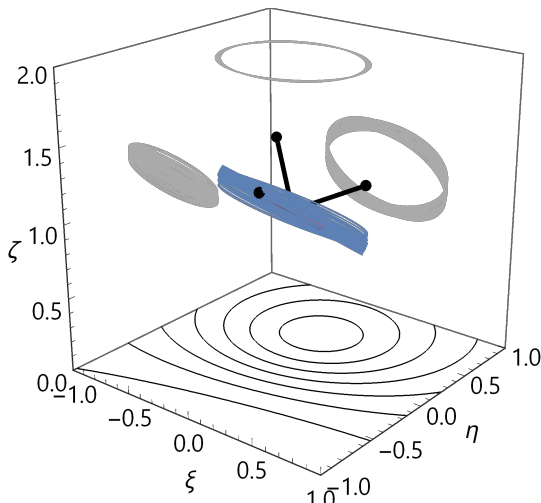
**Figura A.44** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



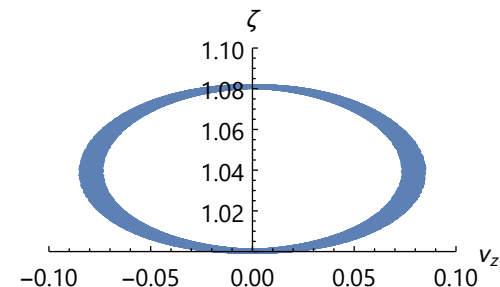
**Figura A.45** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



**Figura A.46** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$

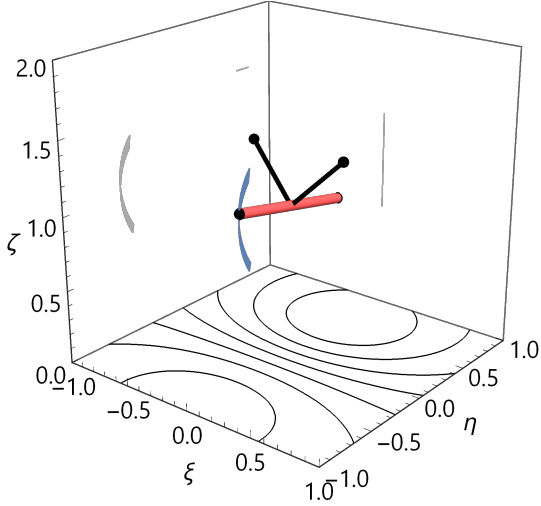


**Figura A.47** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

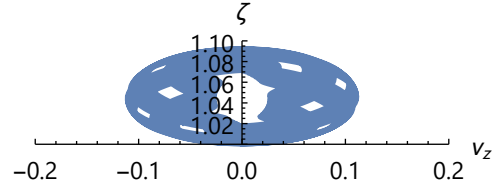


**Figura A.48** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

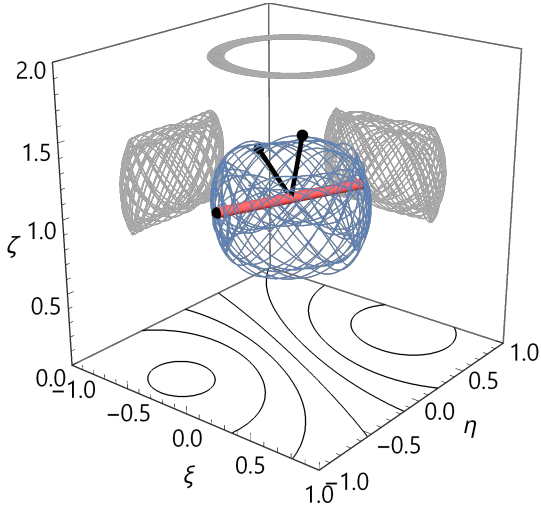
<sup>a</sup> Representación equivalente para  $\Omega = \{1, 10\}$



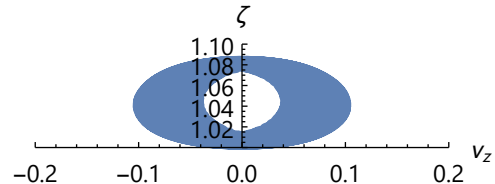
**Figura A.49** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



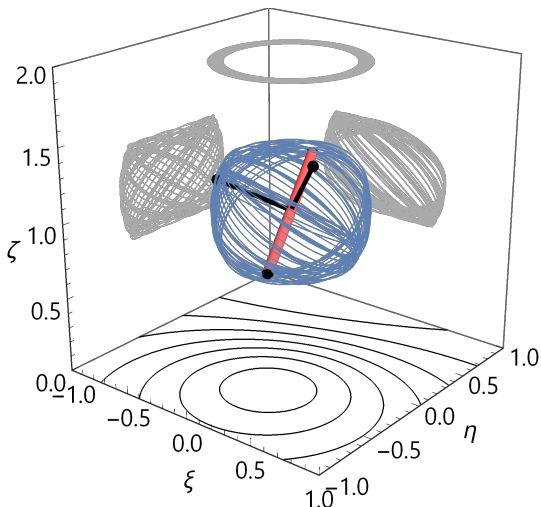
**Figura A.50** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



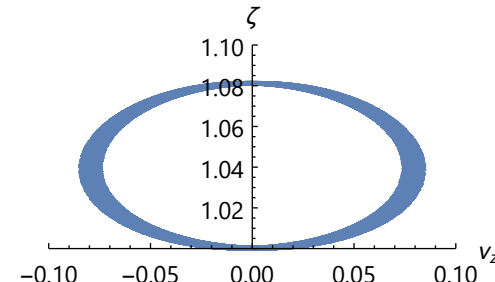
**Figura A.51** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



**Figura A.52** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



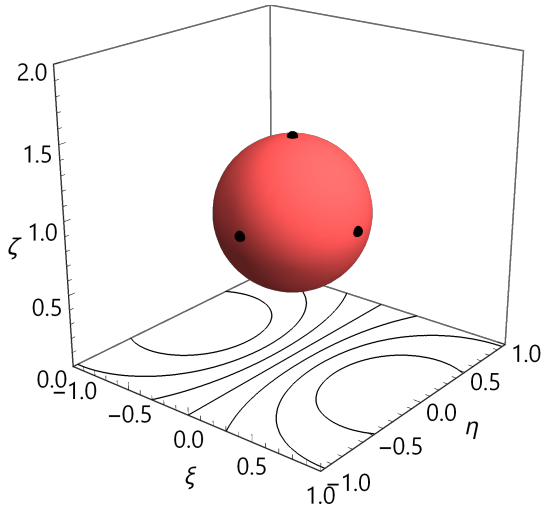
**Figura A.53** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



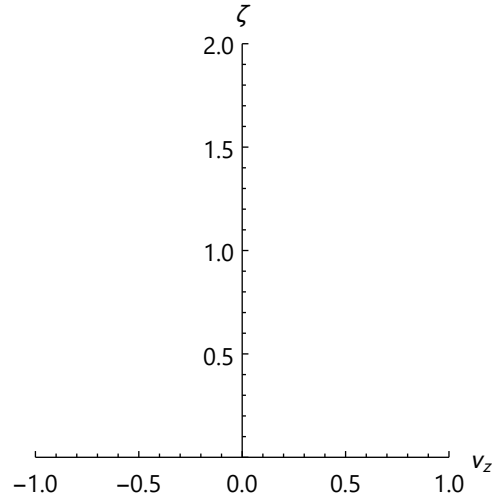
**Figura A.54** Posición frente velocidad:  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0^a$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

<sup>a</sup> Representación equivalente para  $\Omega = \{1, 10\}$

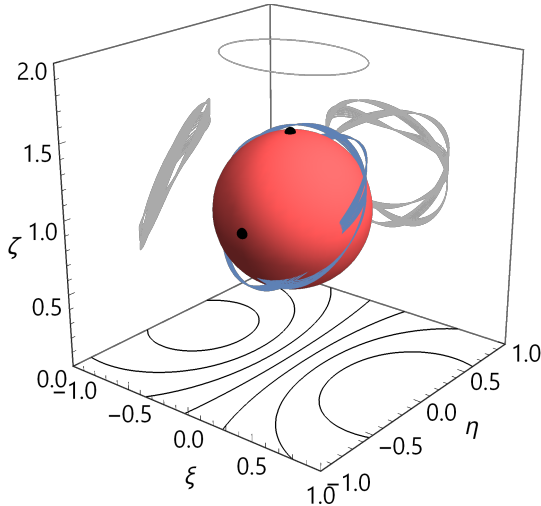
## A.2 Dipolo magnético con geometría de esfera



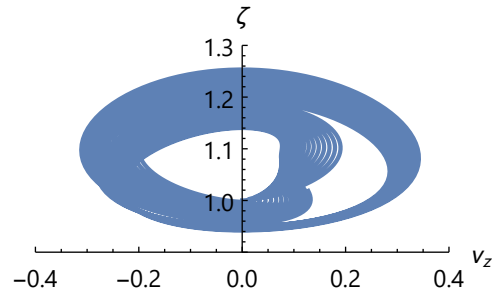
**Figura A.55** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



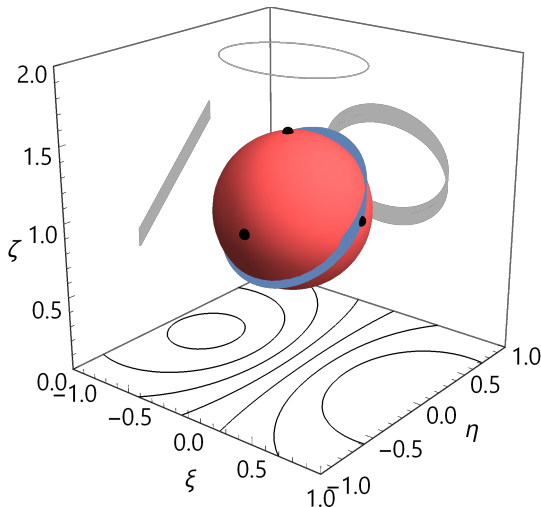
**Figura A.56** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



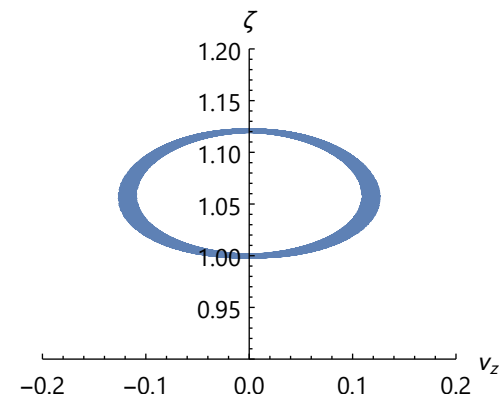
**Figura A.57** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



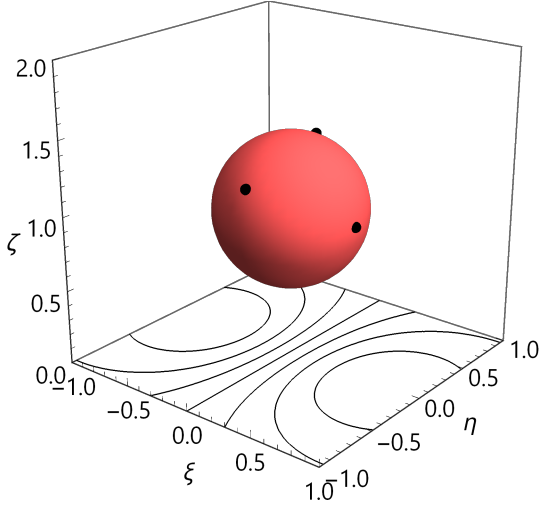
**Figura A.58** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



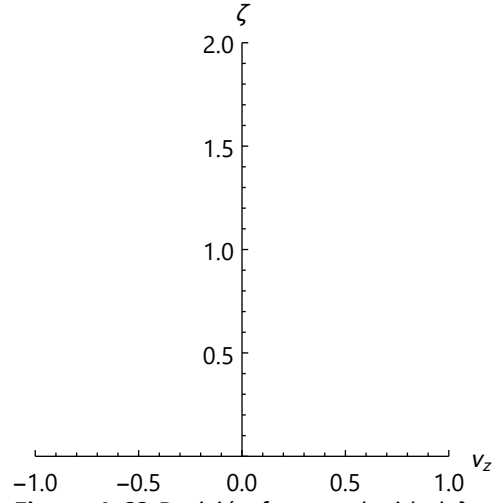
**Figura A.59** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



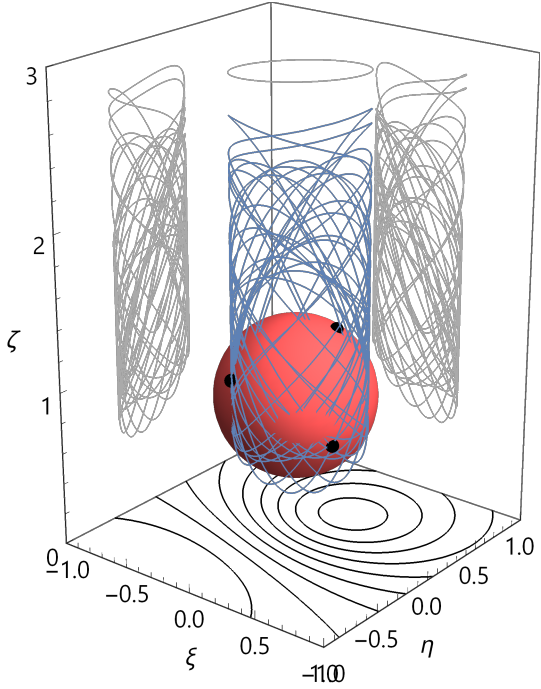
**Figura A.60** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



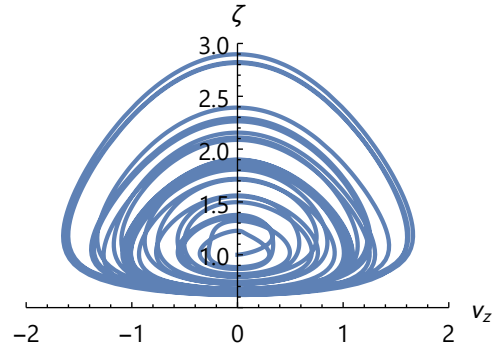
**Figura A.61** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



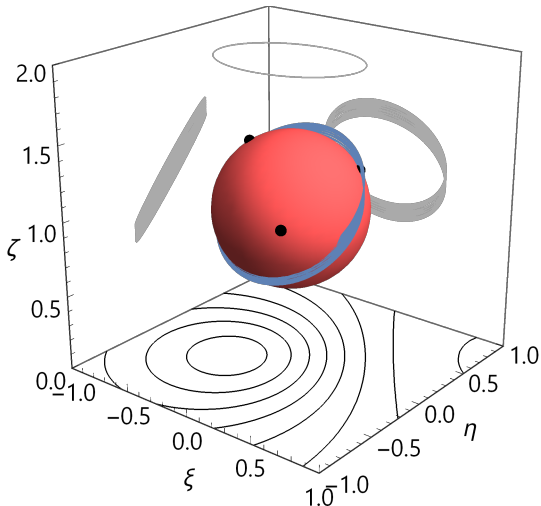
**Figura A.62** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



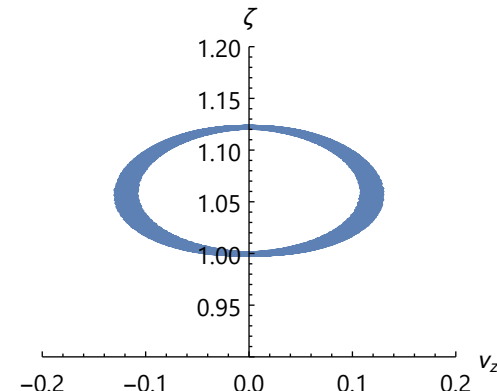
**Figura A.63** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



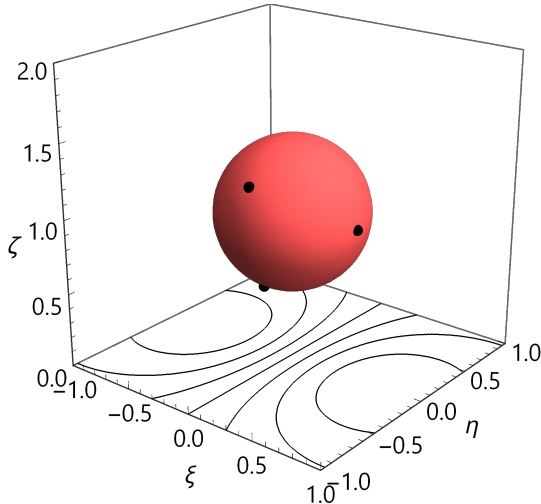
**Figura A.64** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



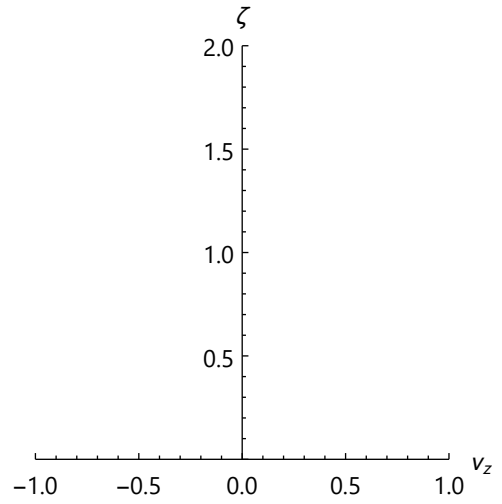
**Figura A.65** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



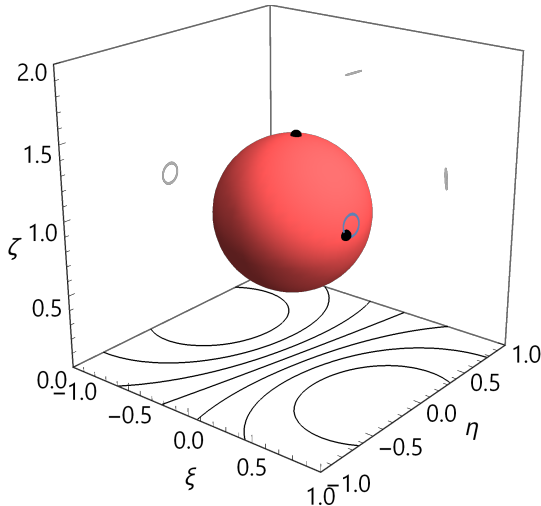
**Figura A.66** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



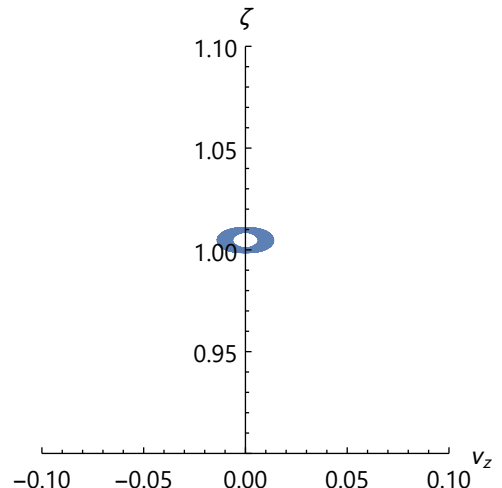
**Figura A.67** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



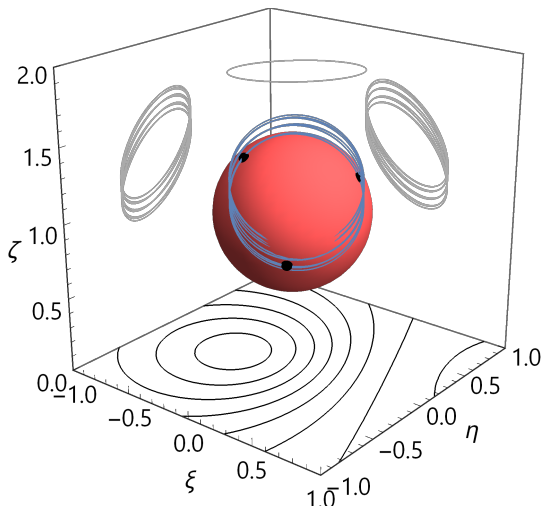
**Figura A.68** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



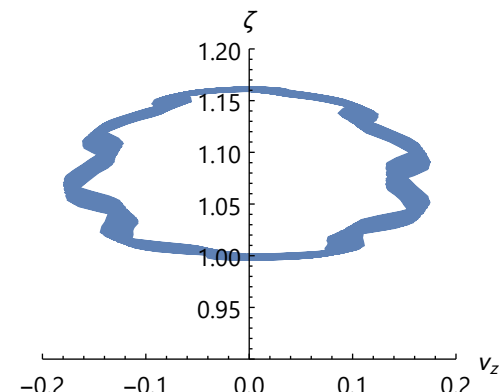
**Figura A.69** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



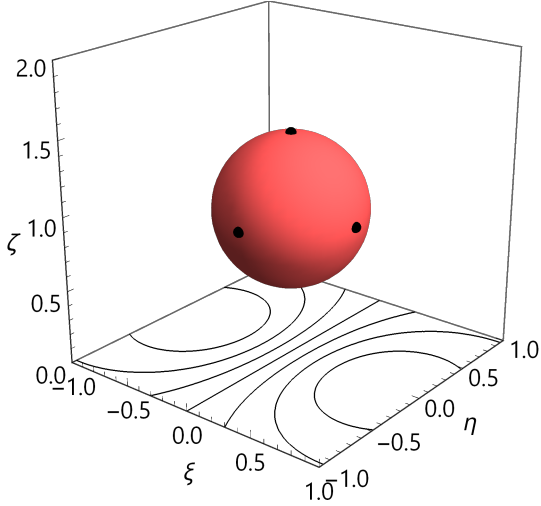
**Figura A.70** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



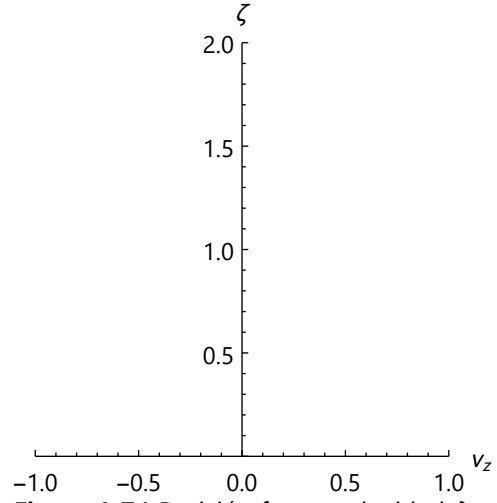
**Figura A.71** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



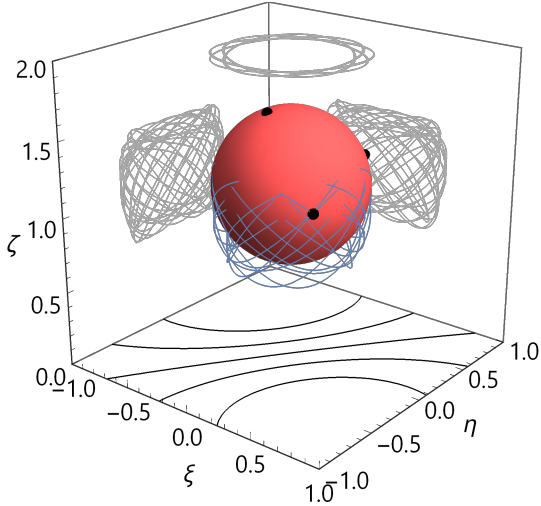
**Figura A.72** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



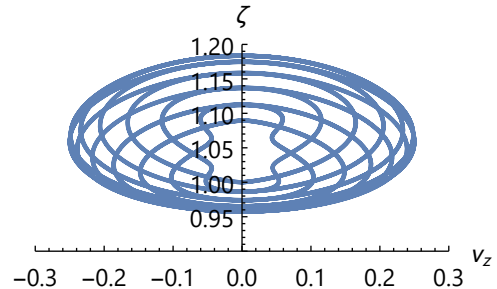
**Figura A.73** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



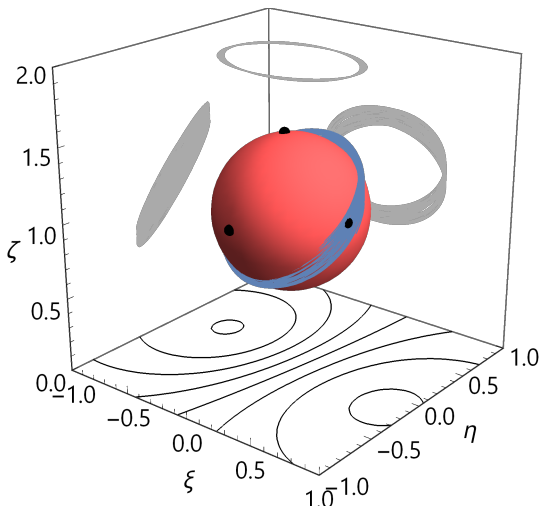
**Figura A.74** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



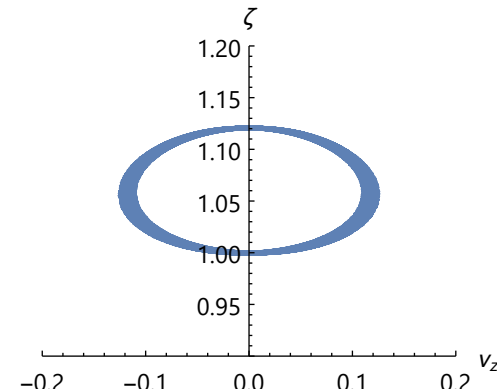
**Figura A.75** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



**Figura A.76** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



**Figura A.77** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



**Figura A.78** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$

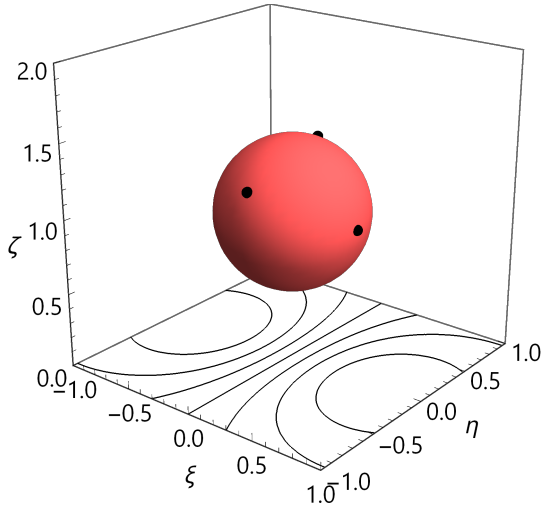


Figura A.79 Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$

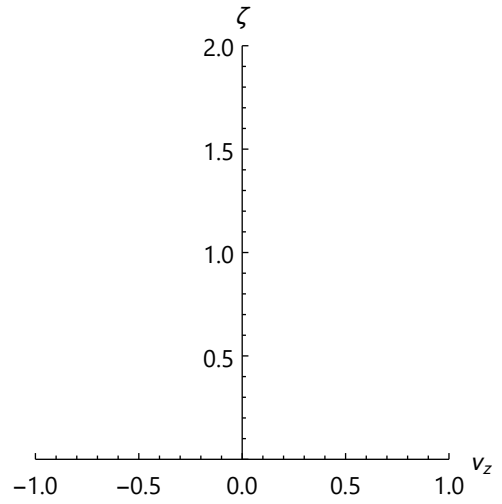


Figura A.80 Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$

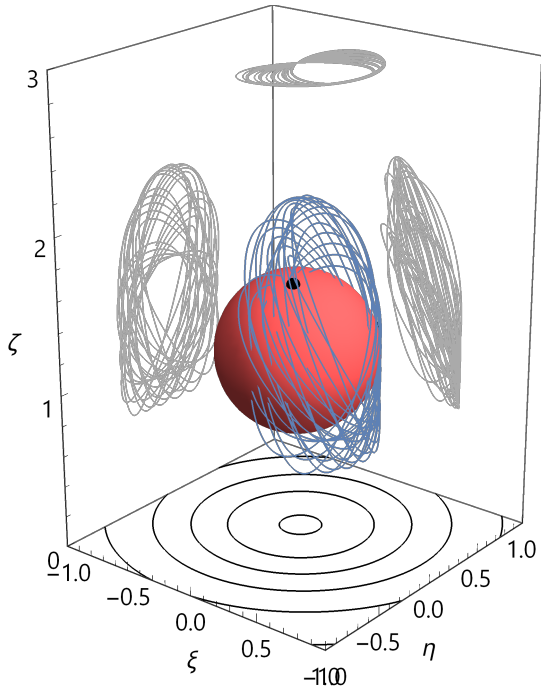


Figura A.81 Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

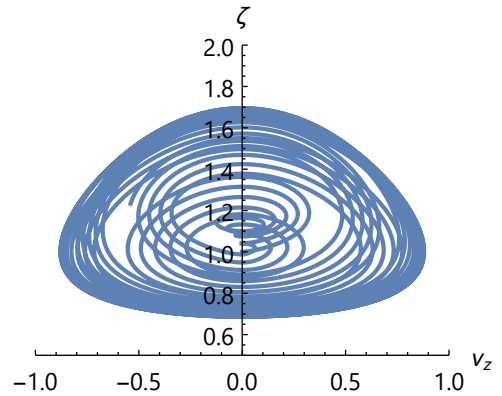


Figura A.82 Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

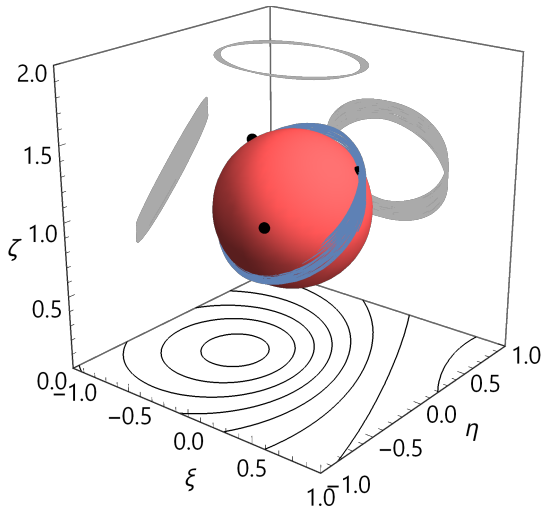


Figura A.83 Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$

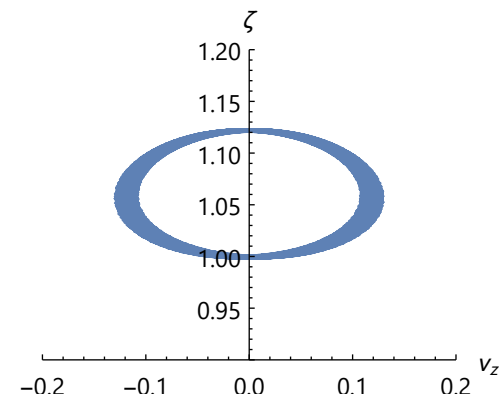
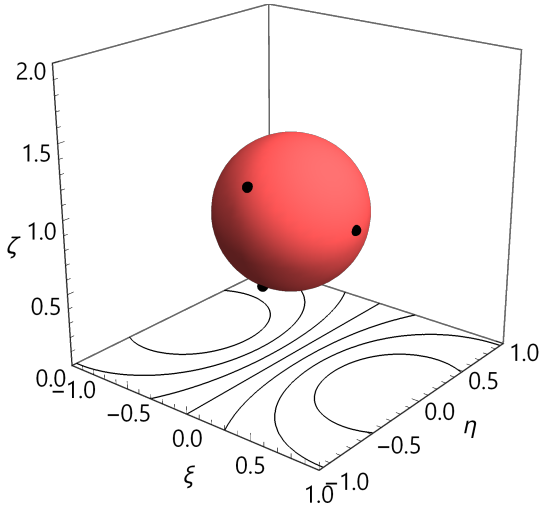
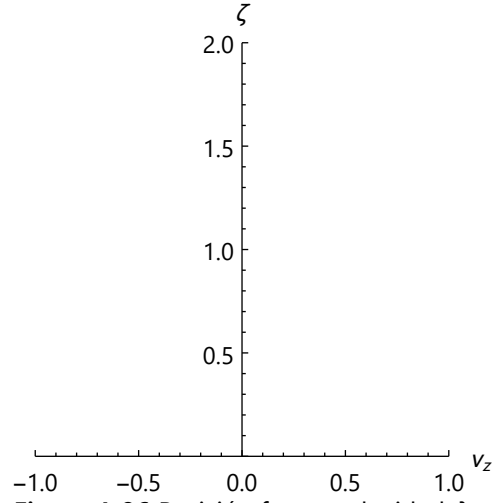


Figura A.84 Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$

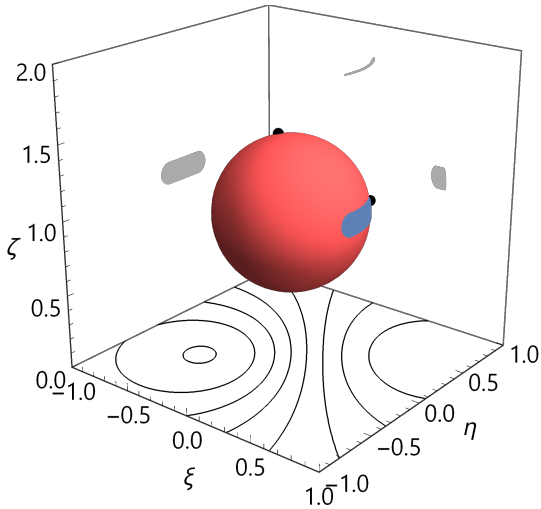




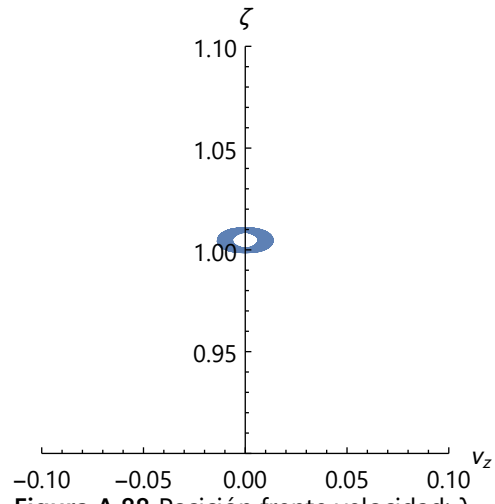
**Figura A.85** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



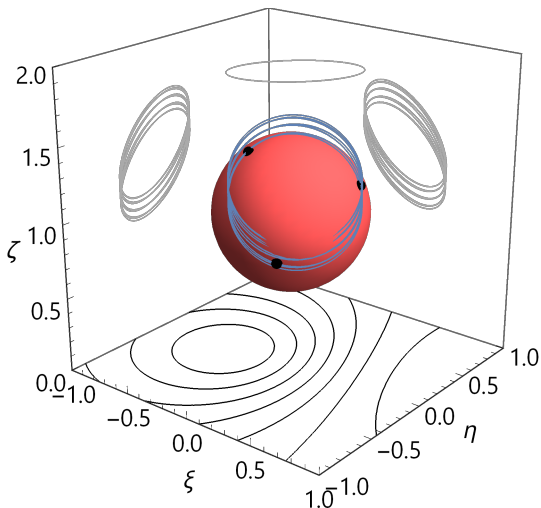
**Figura A.86** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



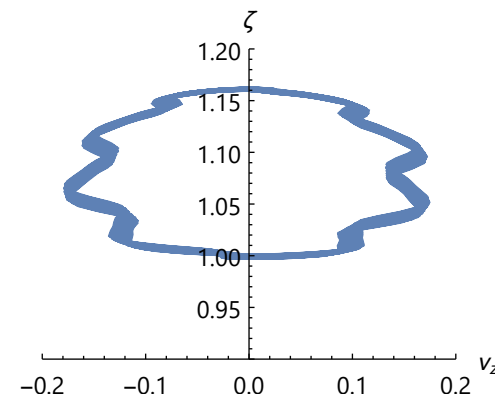
**Figura A.87** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



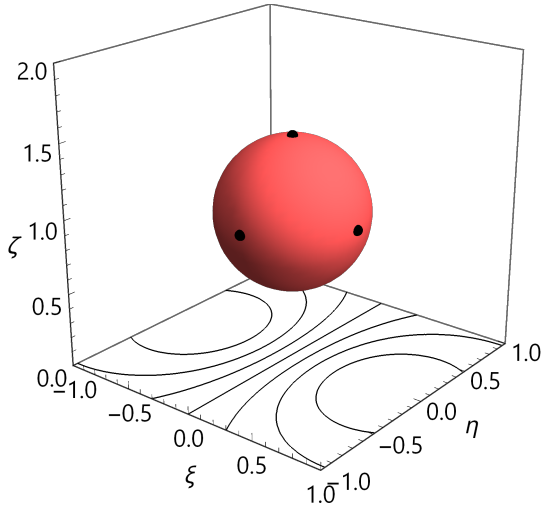
**Figura A.88** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



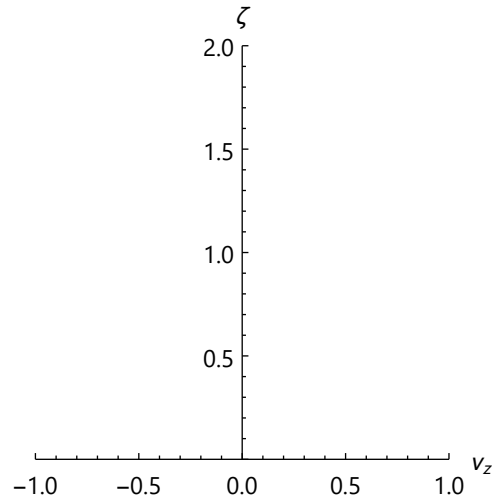
**Figura A.89** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



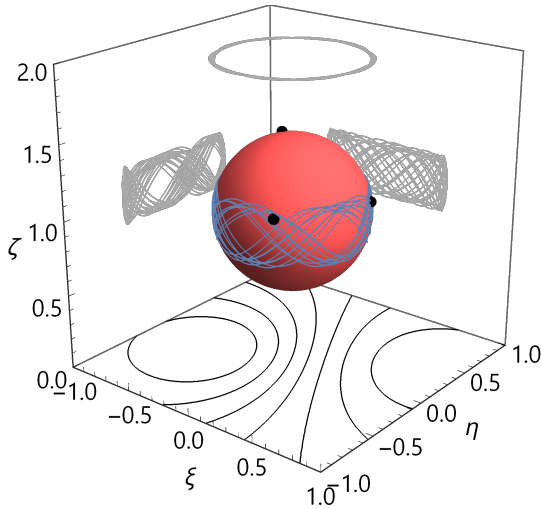
**Figura A.90** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



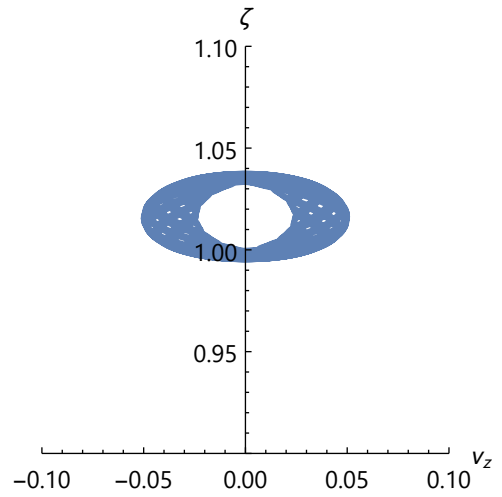
**Figura A.91** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



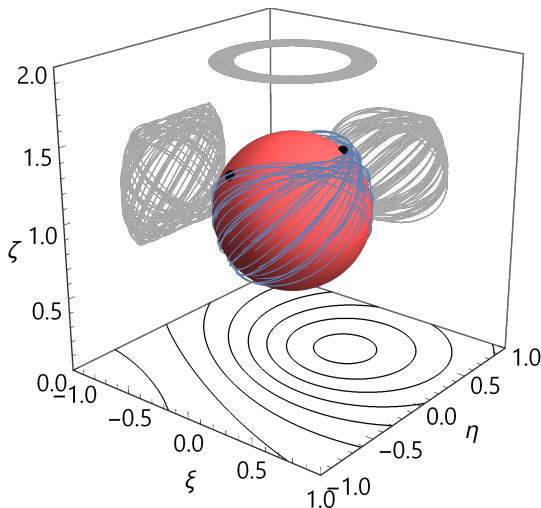
**Figura A.92** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



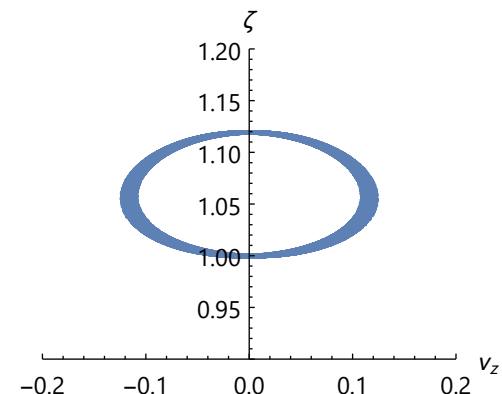
**Figura A.93** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



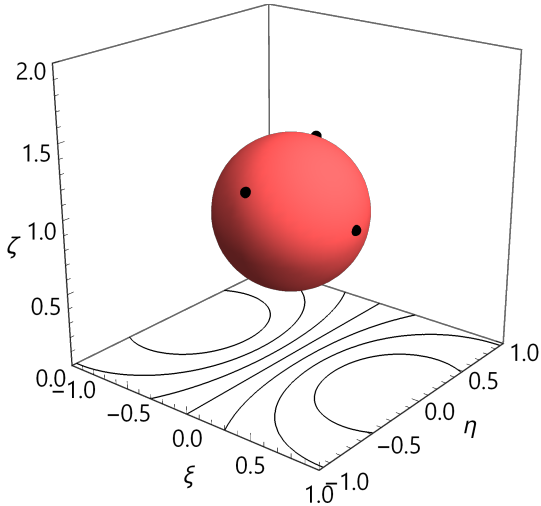
**Figura A.94** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



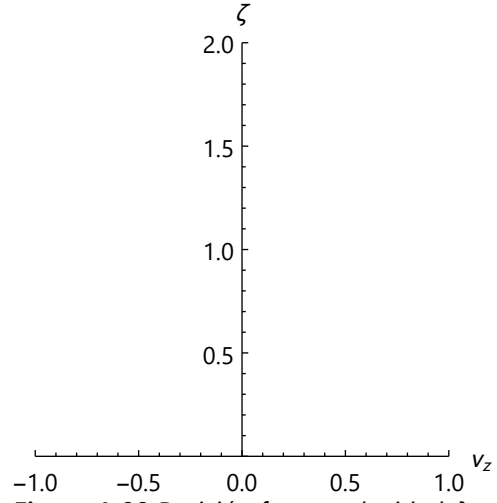
**Figura A.95** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



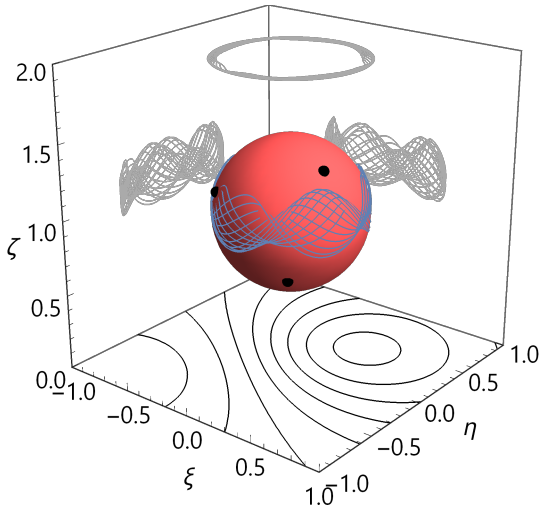
**Figura A.96** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



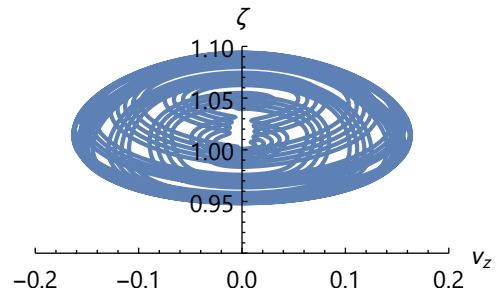
**Figura A.97** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



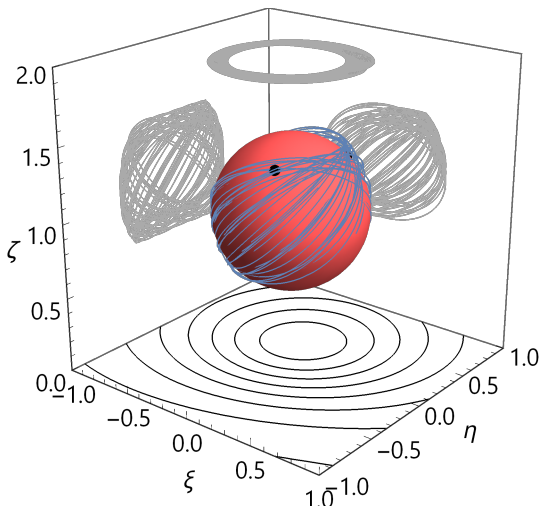
**Figura A.98** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



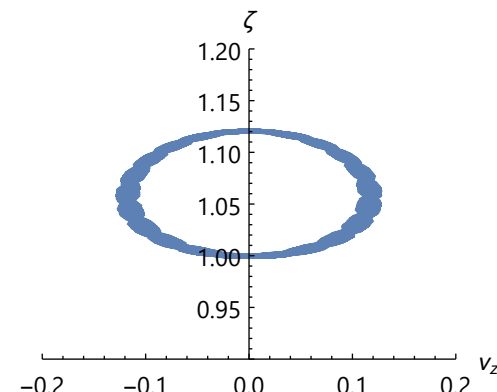
**Figura A.99** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



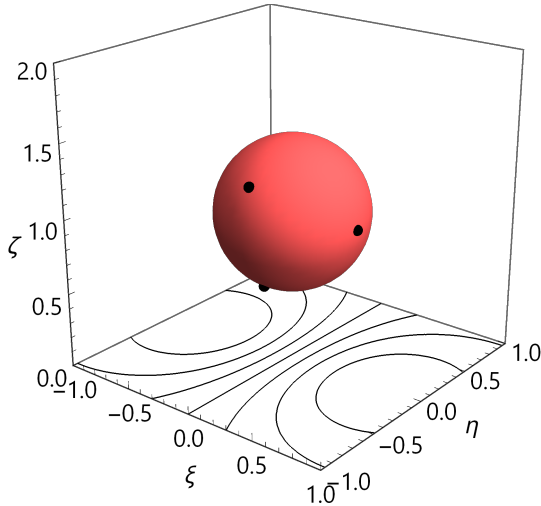
**Figura A.100** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



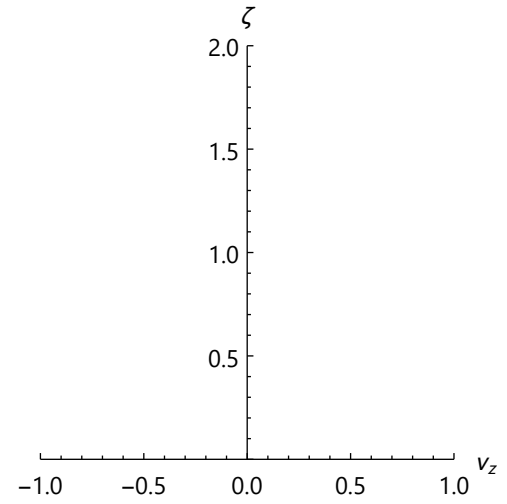
**Figura A.101** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



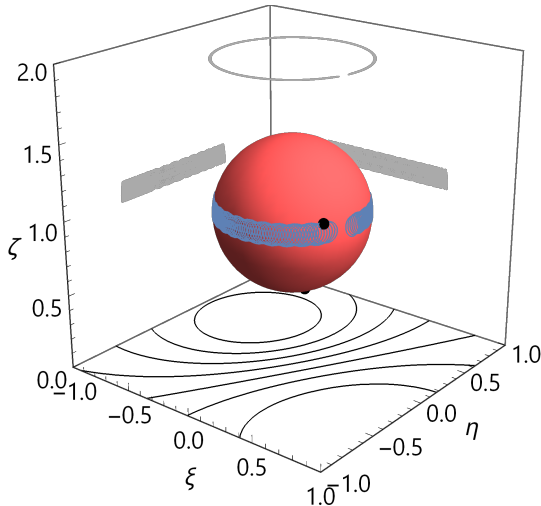
**Figura A.102** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



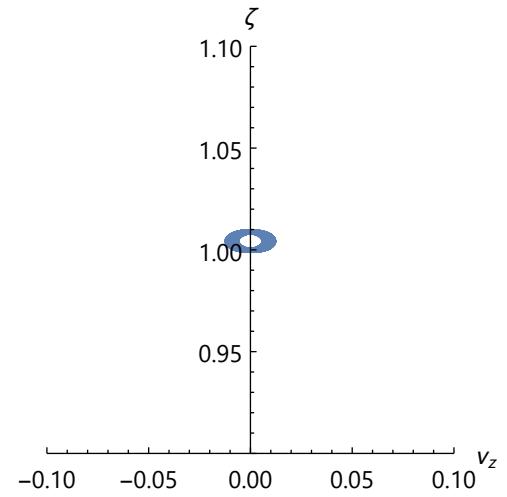
**Figura A.103** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



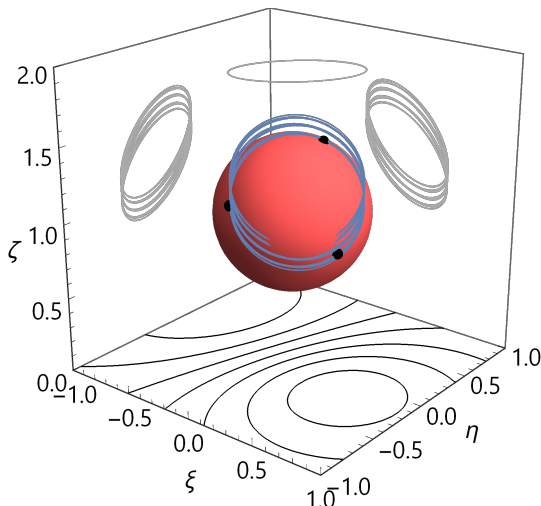
**Figura A.104** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



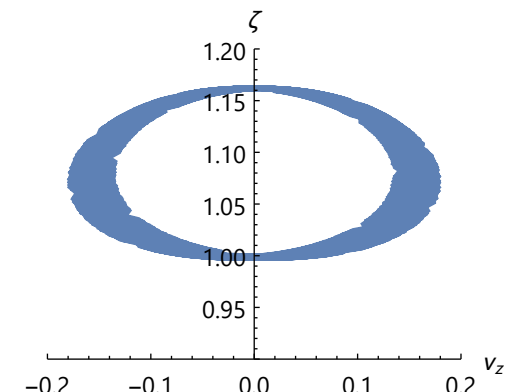
**Figura A.105** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



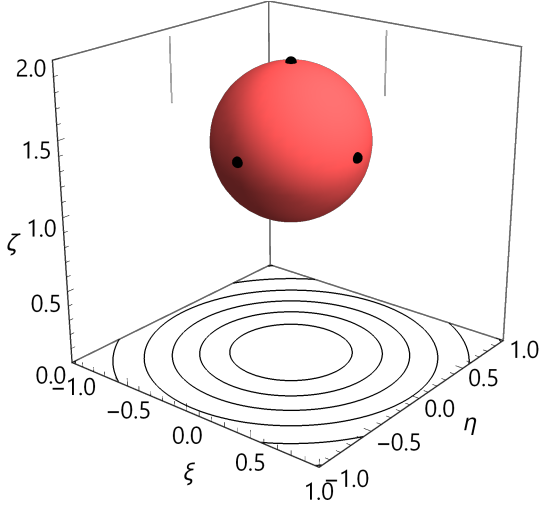
**Figura A.106** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



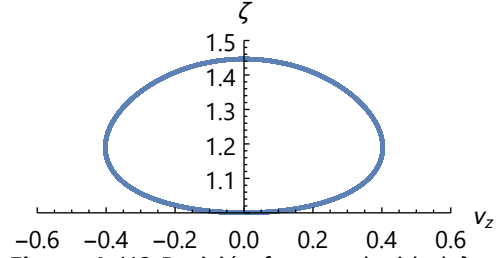
**Figura A.107** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



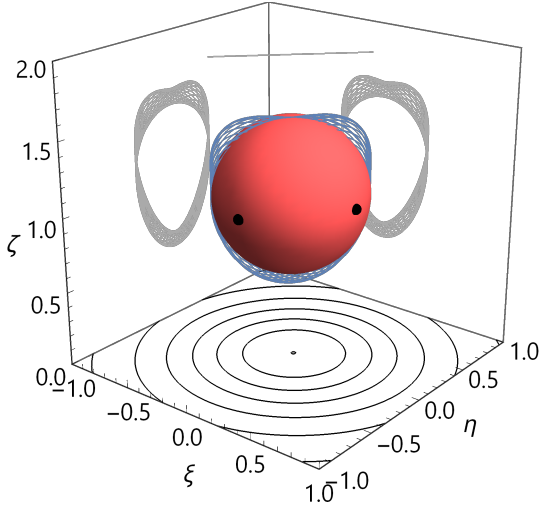
**Figura A.108** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



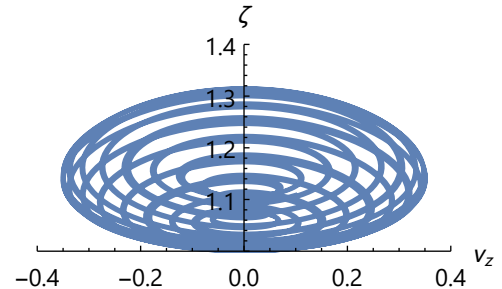
**Figura A.109** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



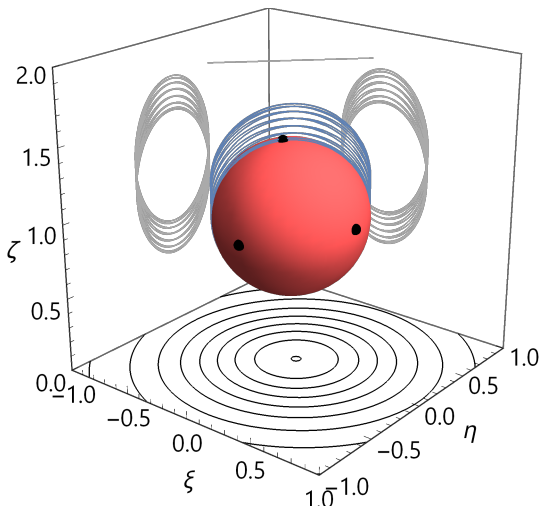
**Figura A.110** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



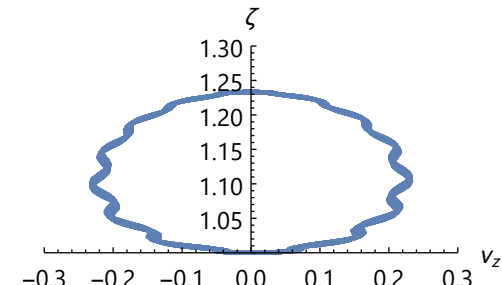
**Figura A.111** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



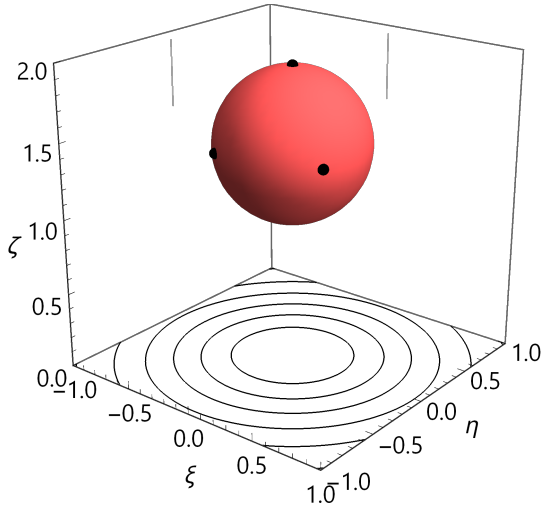
**Figura A.112** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



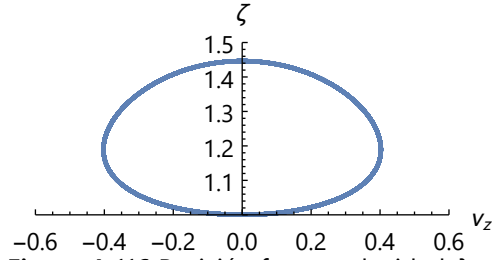
**Figura A.113** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



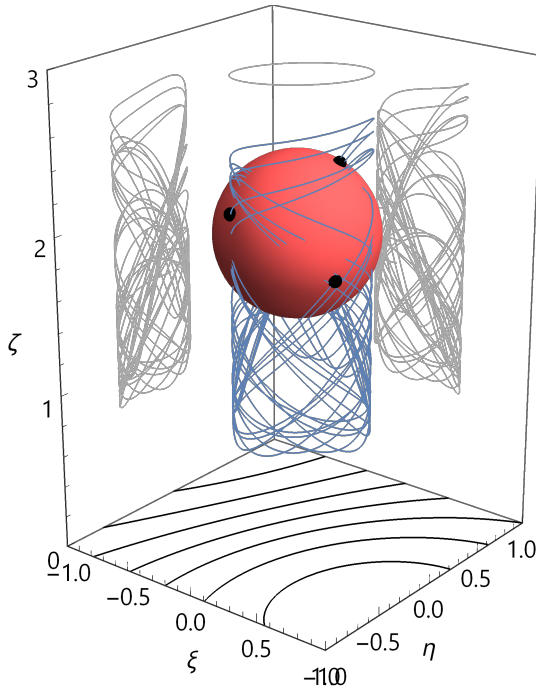
**Figura A.114** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



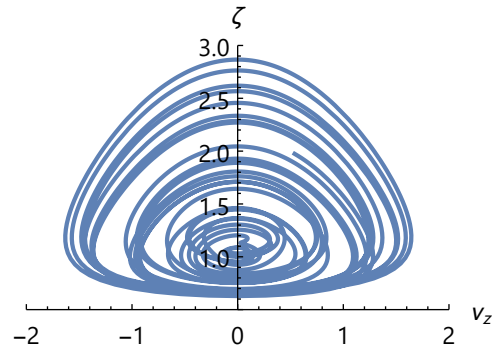
**Figura A.115** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



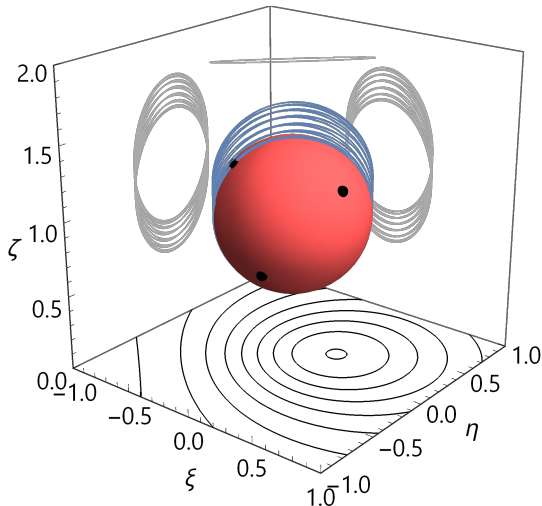
**Figura A.116** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



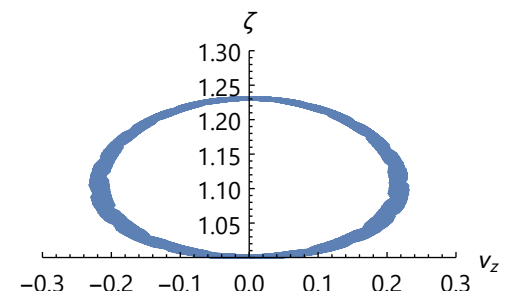
**Figura A.117** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



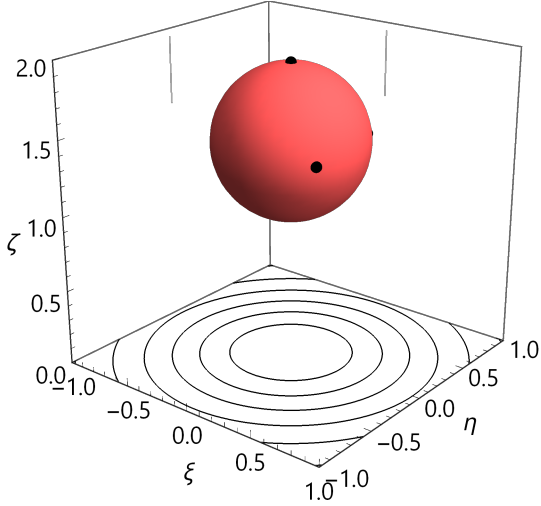
**Figura A.118** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



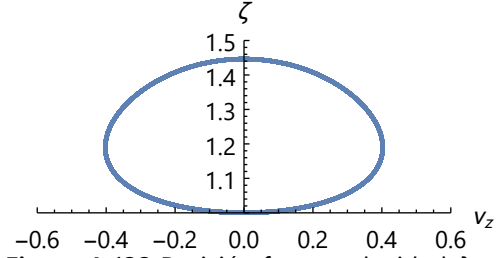
**Figura A.119** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



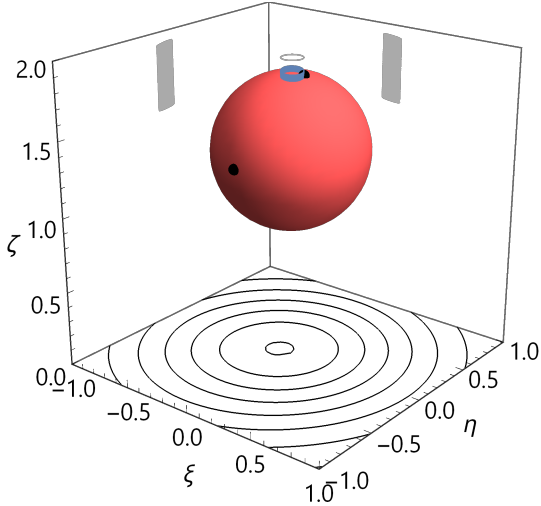
**Figura A.120** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



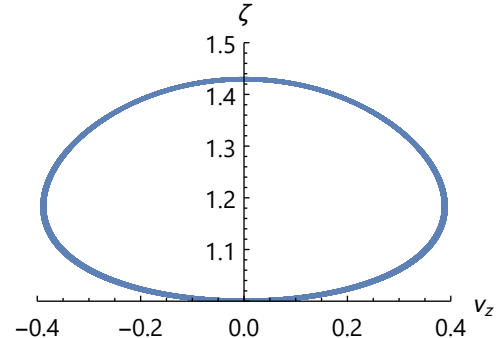
**Figura A.121** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



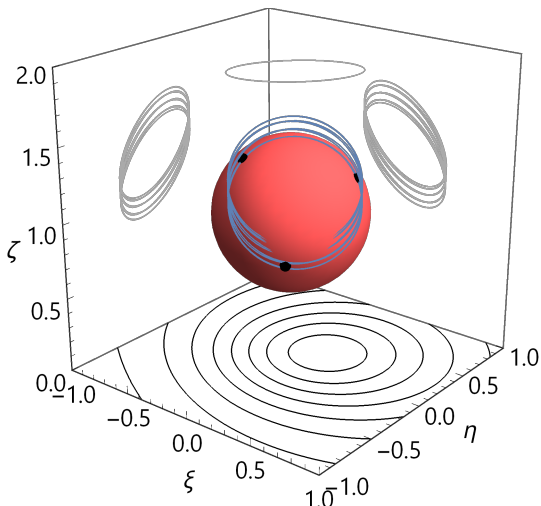
**Figura A.122** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



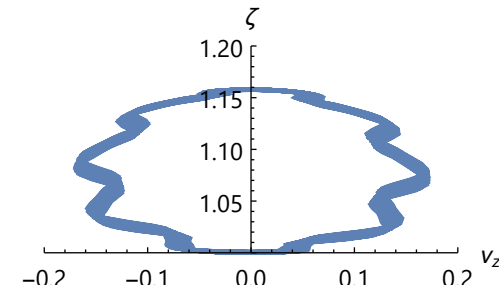
**Figura A.123** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



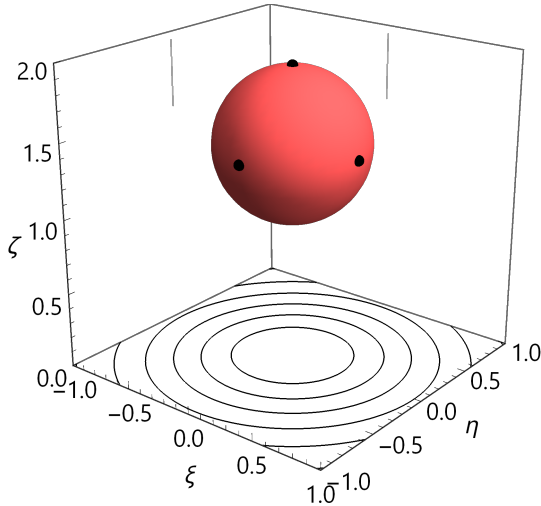
**Figura A.124** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



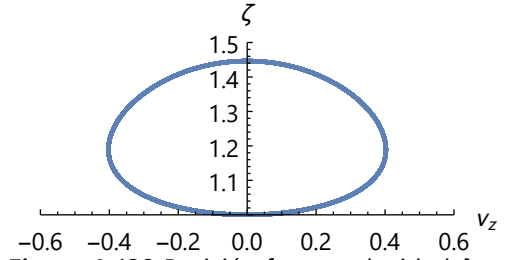
**Figura A.125** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



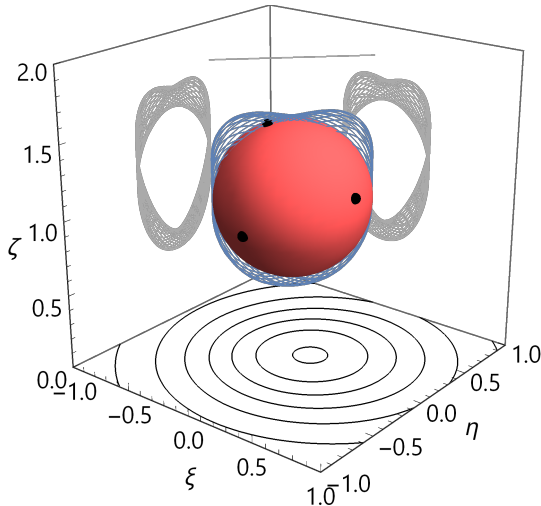
**Figura A.126** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



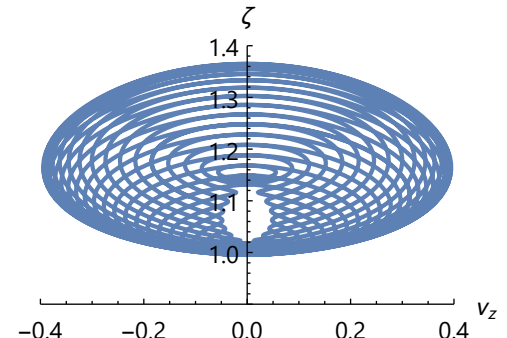
**Figura A.127** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}\bar{y}}(0) = 0$



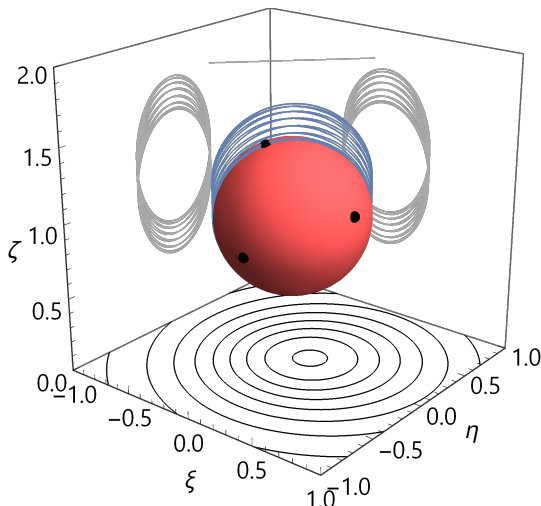
**Figura A.128** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}\bar{y}}(0) = 0$



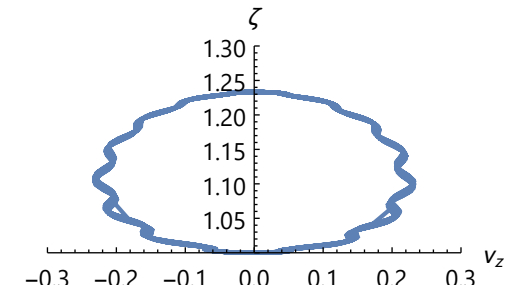
**Figura A.129** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}\bar{y}}(0) = 1$



**Figura A.130** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}\bar{y}}(0) = 1$

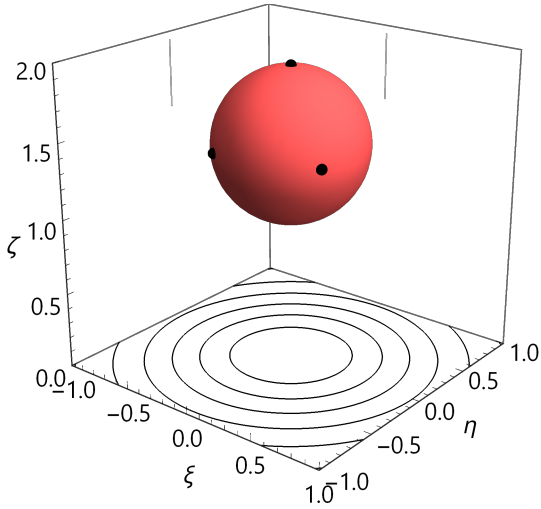


**Figura A.131** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}\bar{y}}(0) = 10$

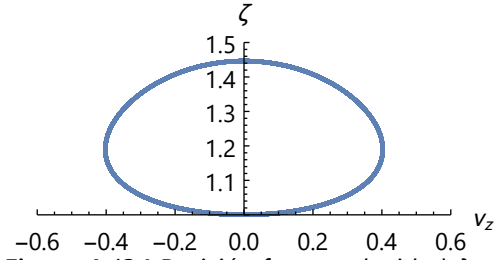


**Figura A.132** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}\bar{y}}(0) = 10$

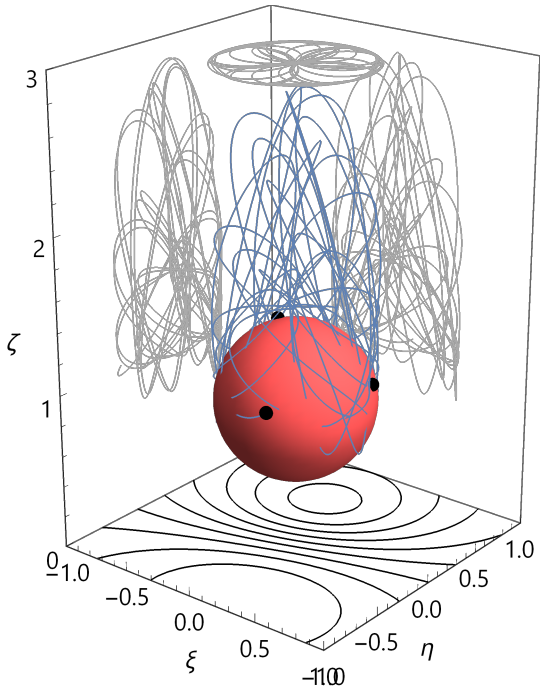




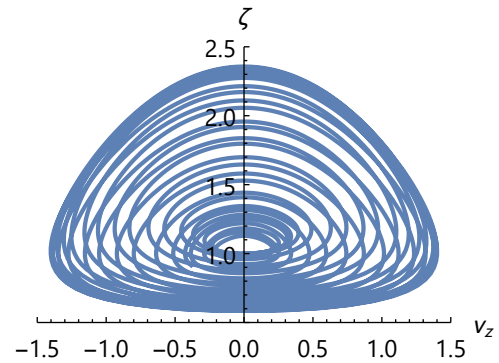
**Figura A.133** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_Z(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



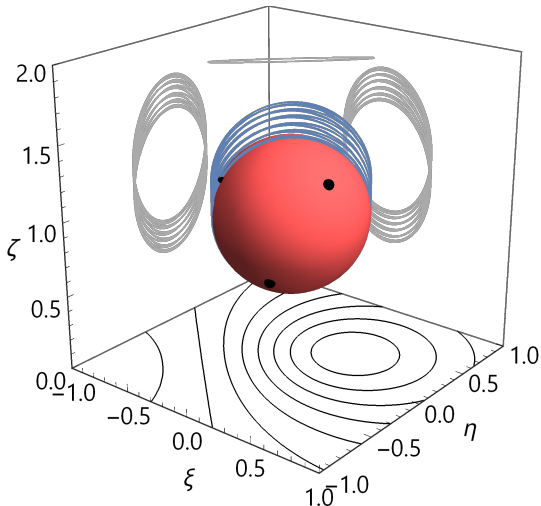
**Figura A.134** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_Z(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



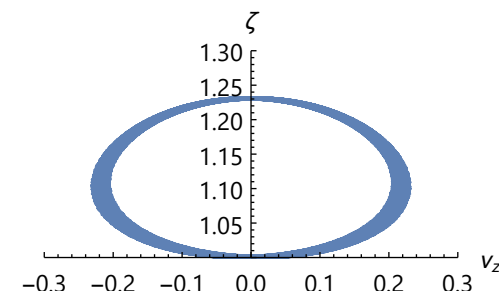
**Figura A.135** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_Z(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



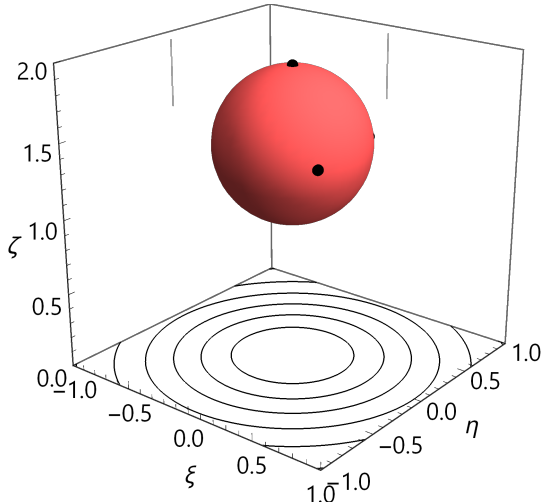
**Figura A.136** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_Z(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



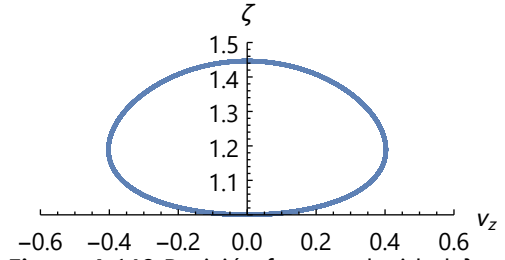
**Figura A.137** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_Z(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



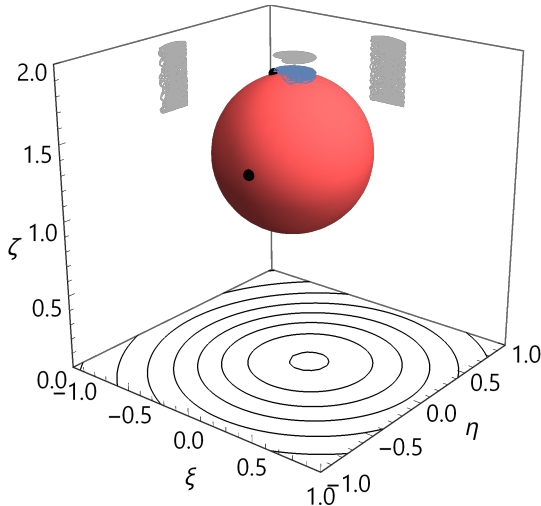
**Figura A.138** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_Z(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



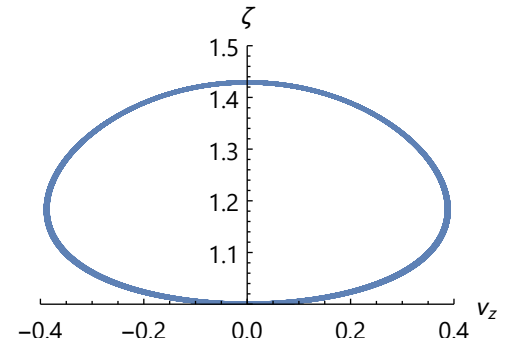
**Figura A.139** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}\bar{y}}(0) = 0$



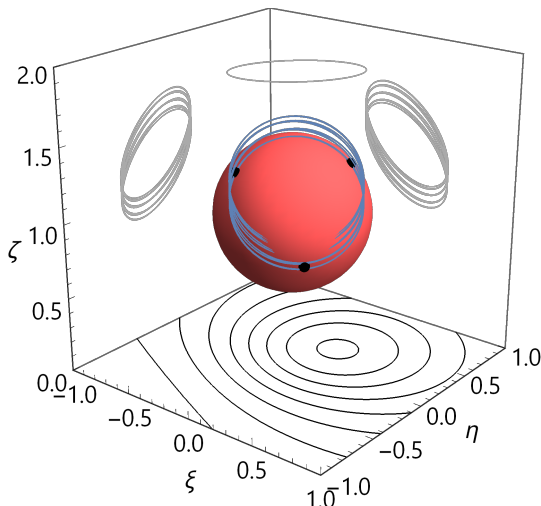
**Figura A.140** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}\bar{y}}(0) = 0$



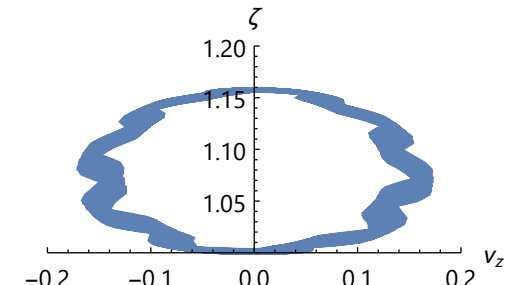
**Figura A.141** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}\bar{y}}(0) = 1$



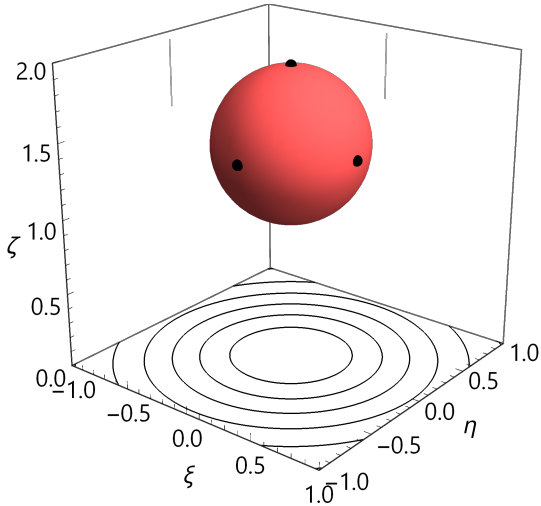
**Figura A.142** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}\bar{y}}(0) = 1$



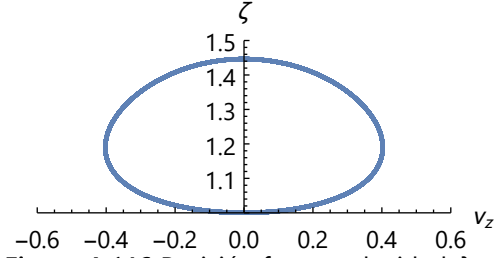
**Figura A.143** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}\bar{y}}(0) = 10$



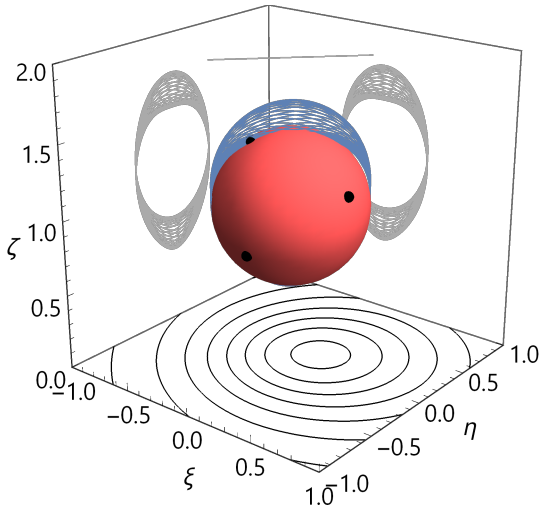
**Figura A.144** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}\bar{y}}(0) = 10$



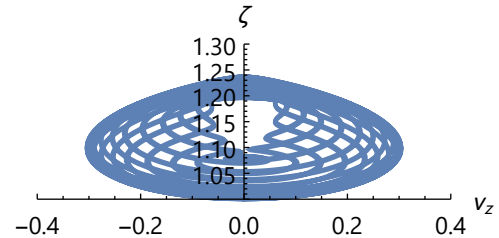
**Figura A.145** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



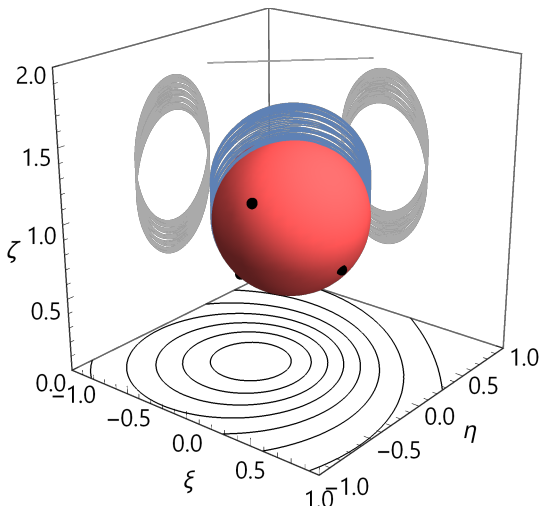
**Figura A.146** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



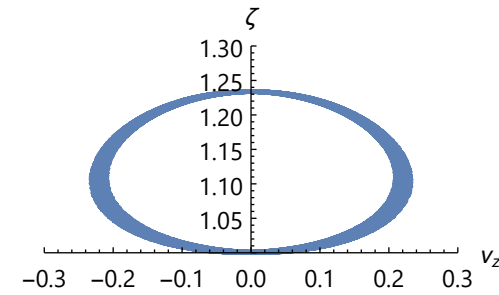
**Figura A.147** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



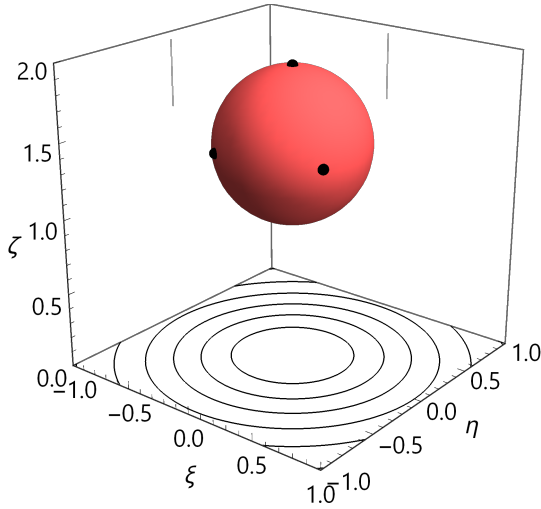
**Figura A.148** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



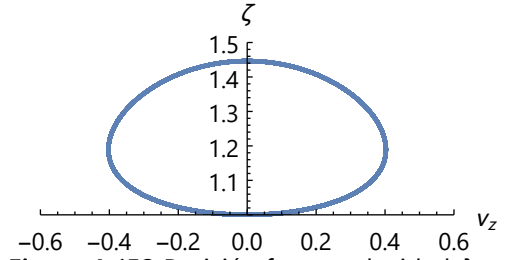
**Figura A.149** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



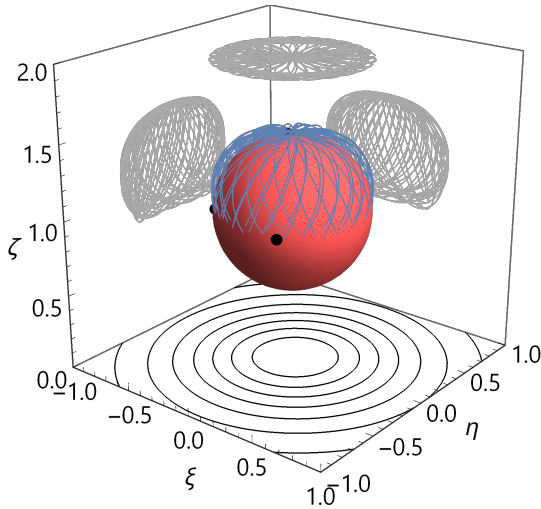
**Figura A.150** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



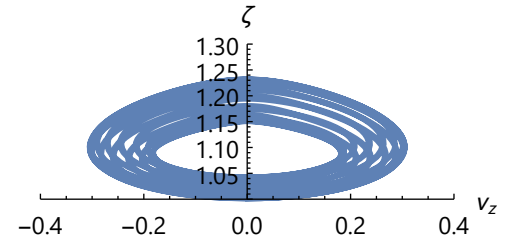
**Figura A.151** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}\bar{y}}(0) = 0$



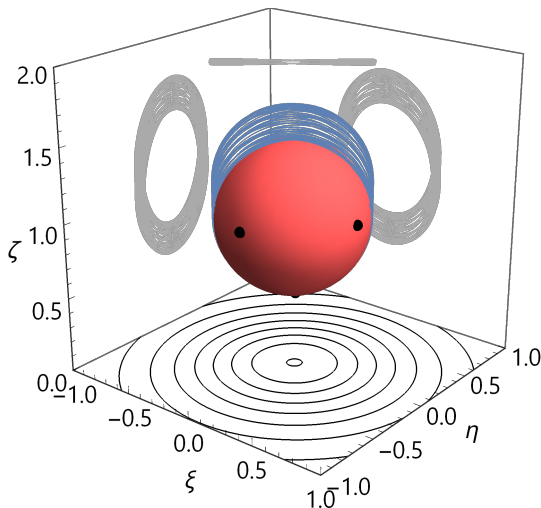
**Figura A.152** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}\bar{y}}(0) = 0$



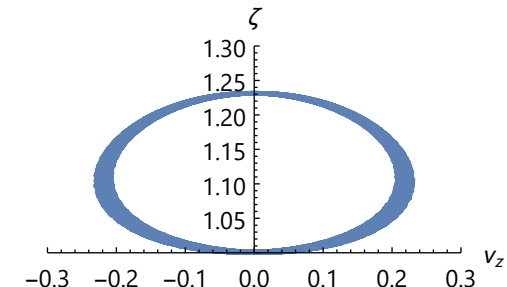
**Figura A.153** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}\bar{y}}(0) = 1$



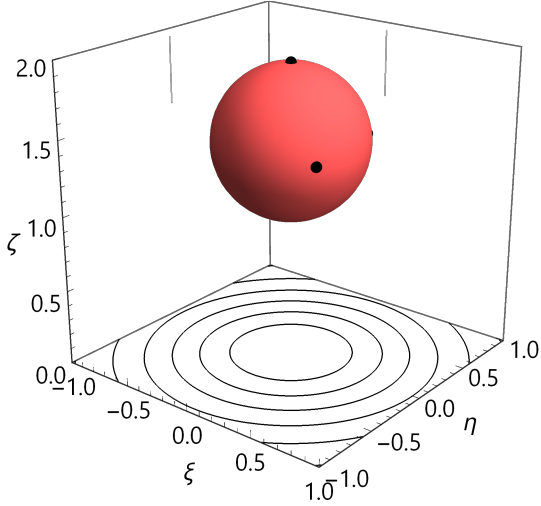
**Figura A.154** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}\bar{y}}(0) = 1$



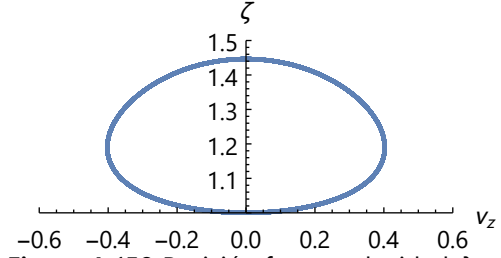
**Figura A.155** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}\bar{y}}(0) = 10$



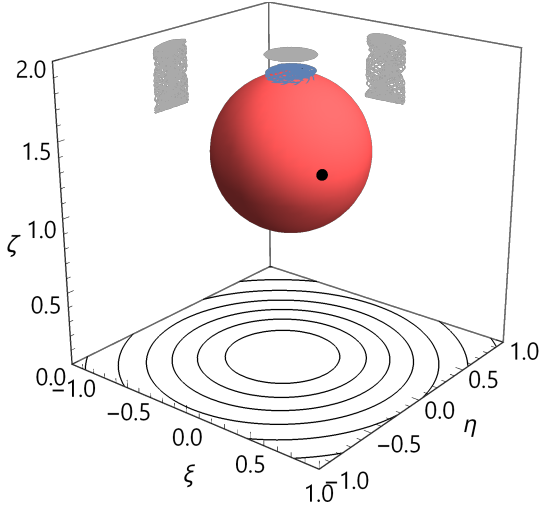
**Figura A.156** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x}\bar{y}}(0) = 10$



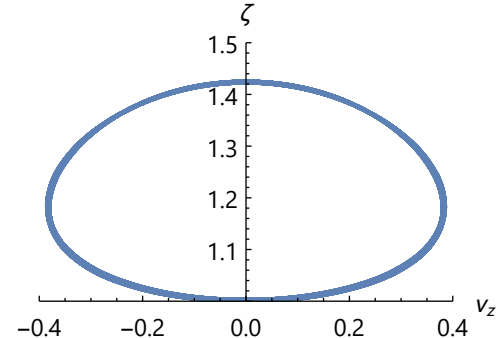
**Figura A.157** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



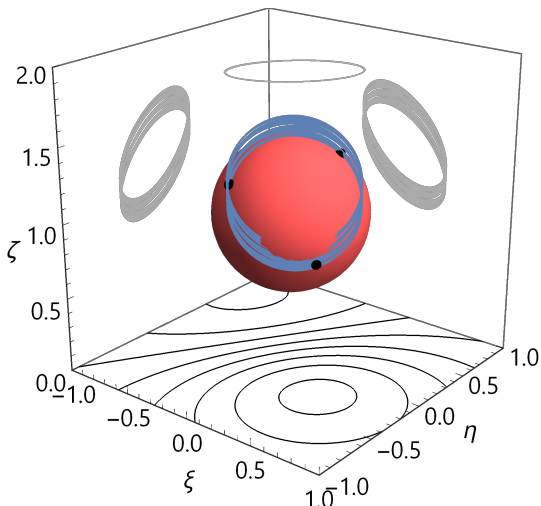
**Figura A.158** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



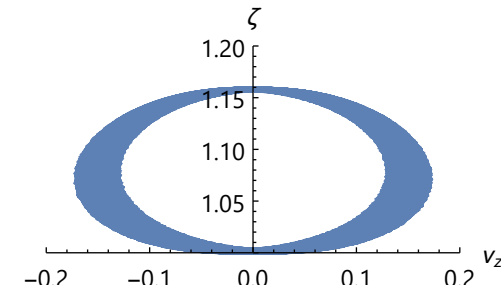
**Figura A.159** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



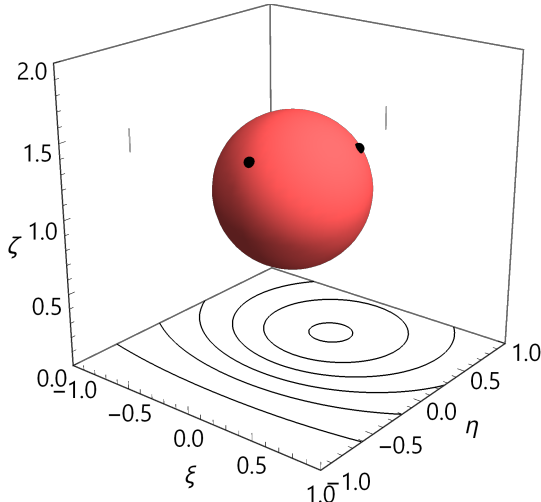
**Figura A.160** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



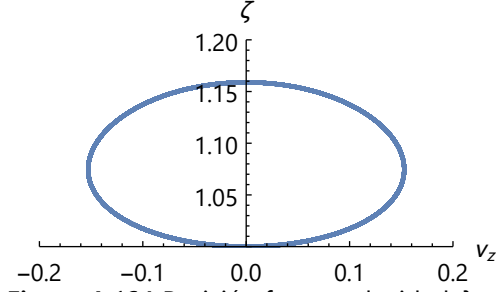
**Figura A.161** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



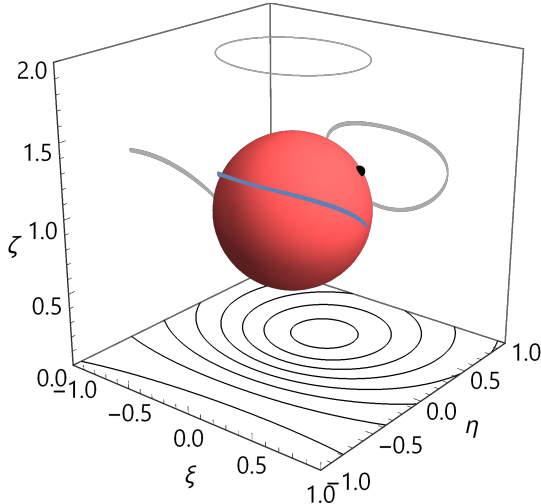
**Figura A.162** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



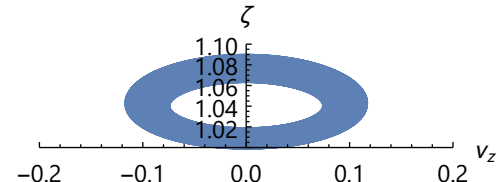
**Figura A.163** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



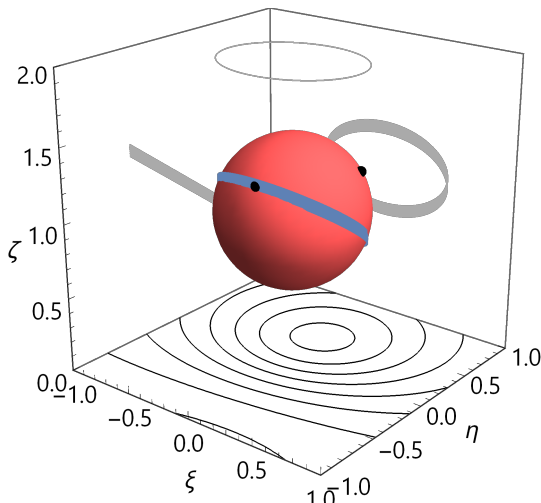
**Figura A.164** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



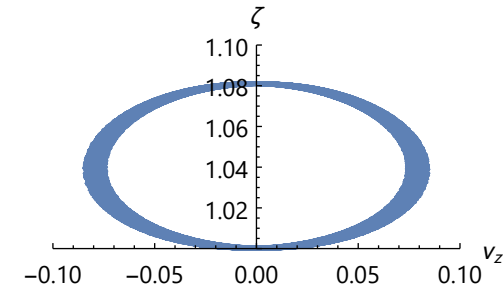
**Figura A.165** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



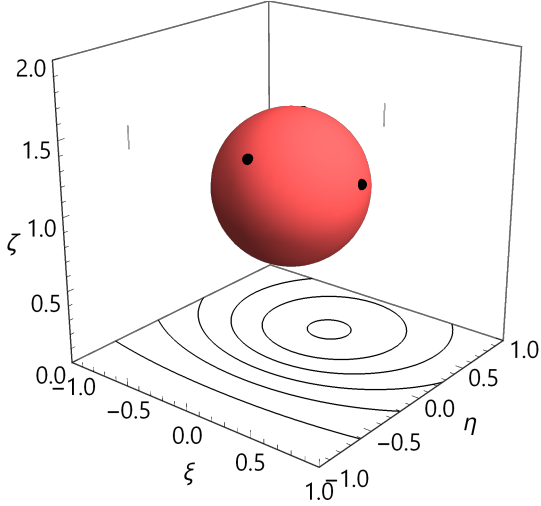
**Figura A.166** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



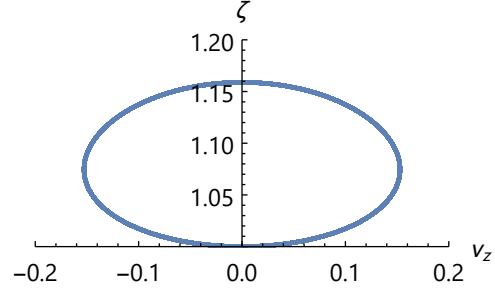
**Figura A.167** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



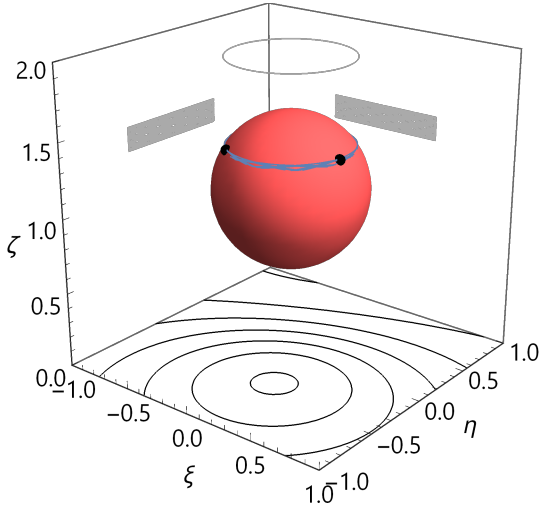
**Figura A.168** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



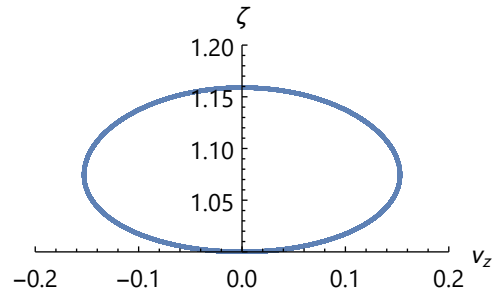
**Figura A.169** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



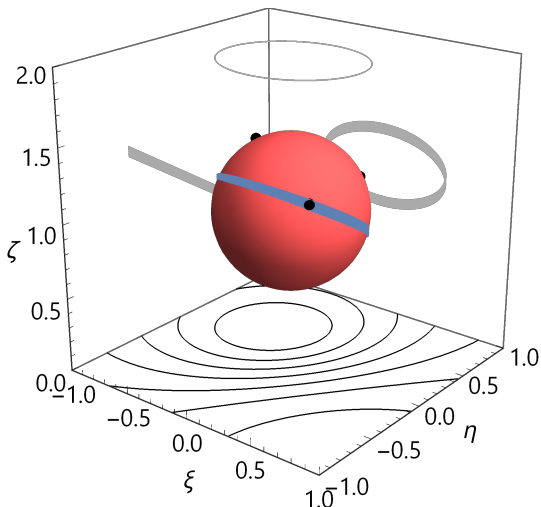
**Figura A.170** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



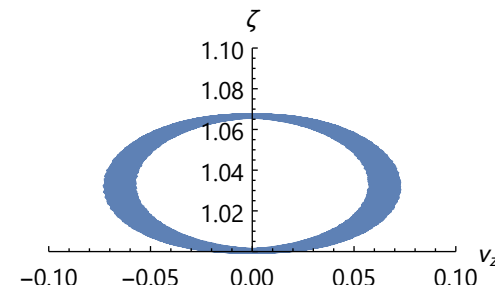
**Figura A.171** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



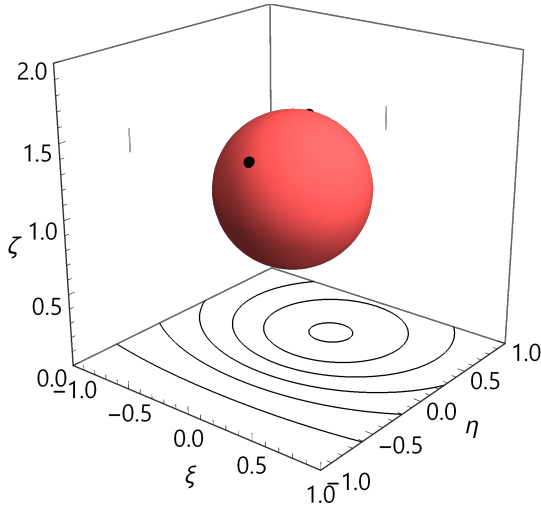
**Figura A.172** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



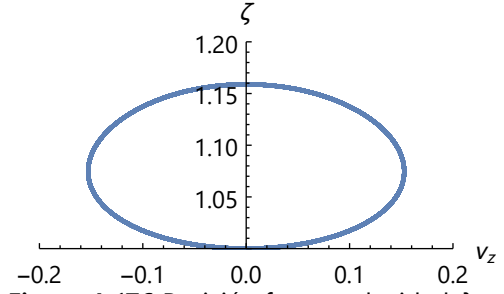
**Figura A.173** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



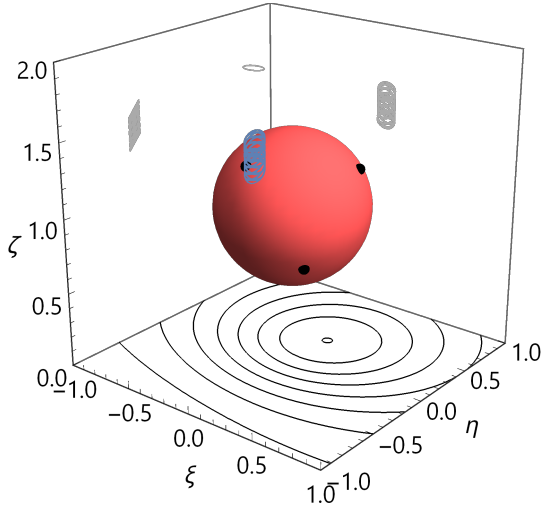
**Figura A.174** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



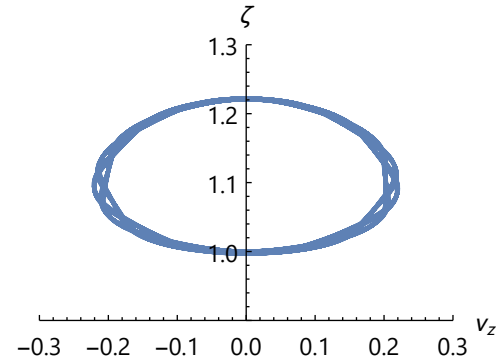
**Figura A.175** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



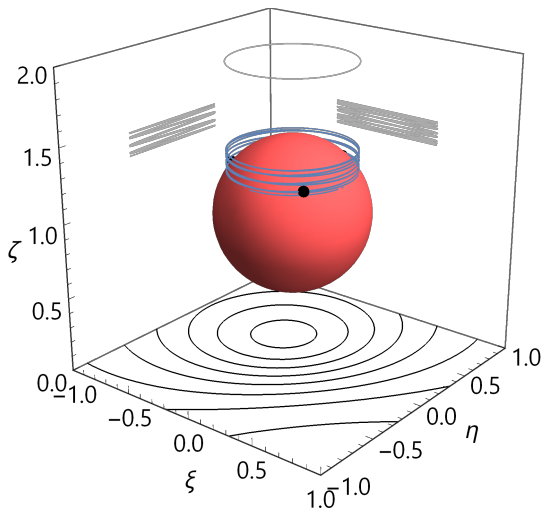
**Figura A.176** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



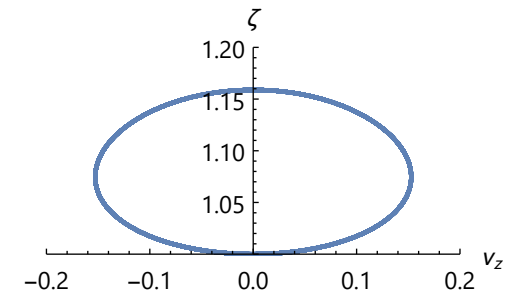
**Figura A.177** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



**Figura A.178** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



**Figura A.179** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



**Figura A.180** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



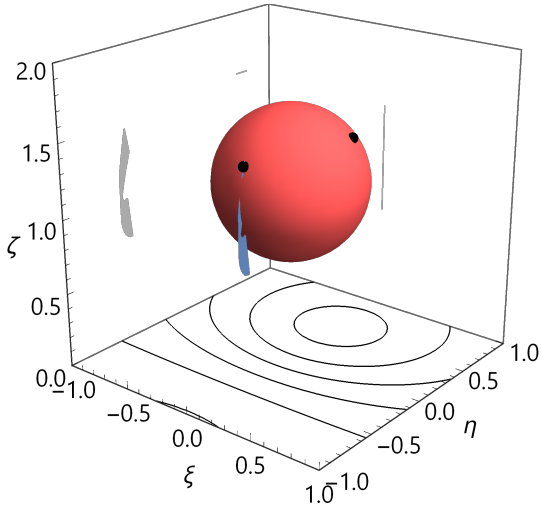


Figura A.181 Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$

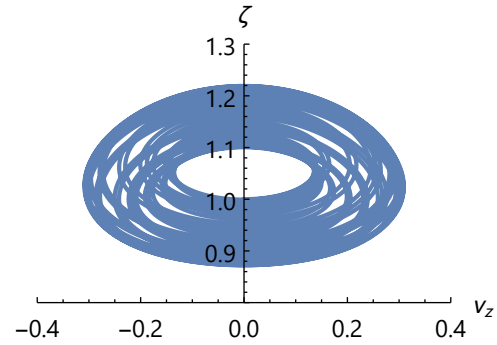


Figura A.182 Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$

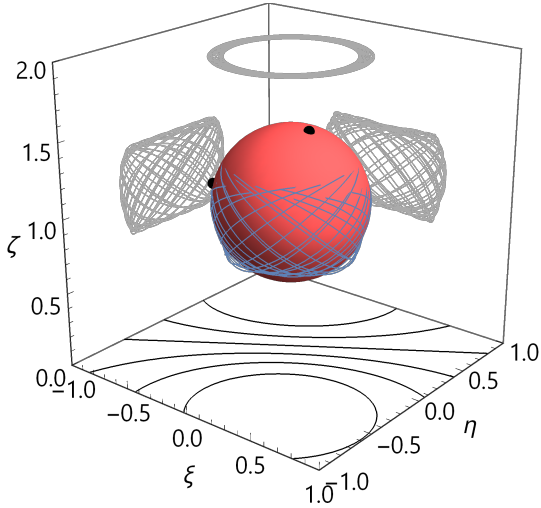


Figura A.183 Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$

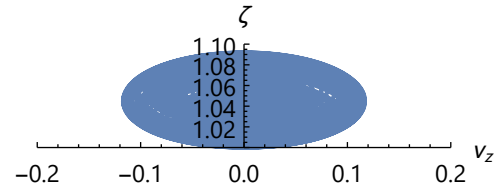


Figura A.184 Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$

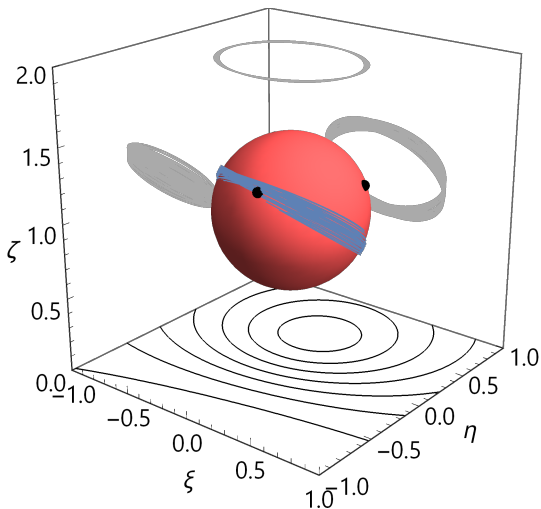


Figura A.185 Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

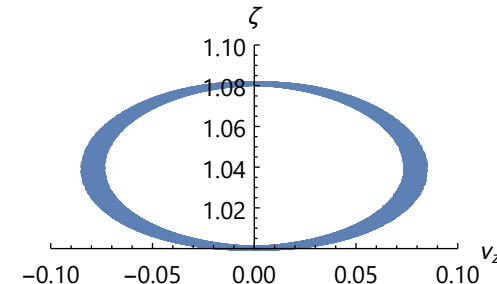
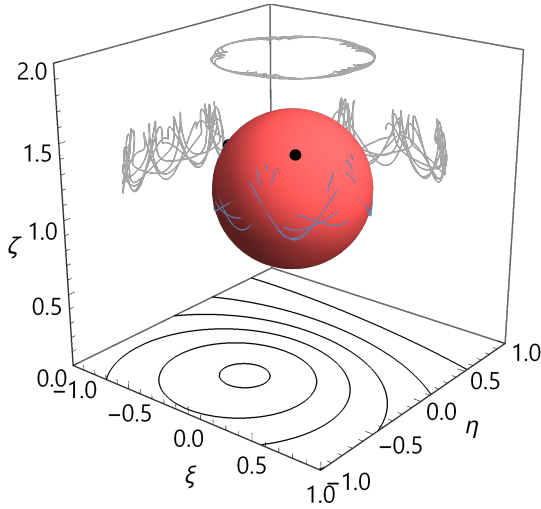
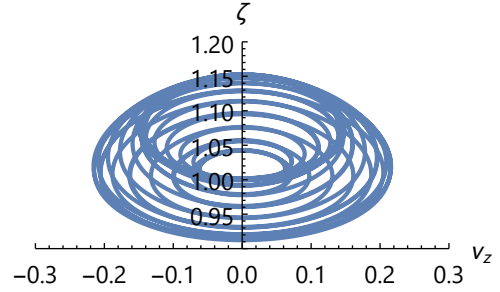


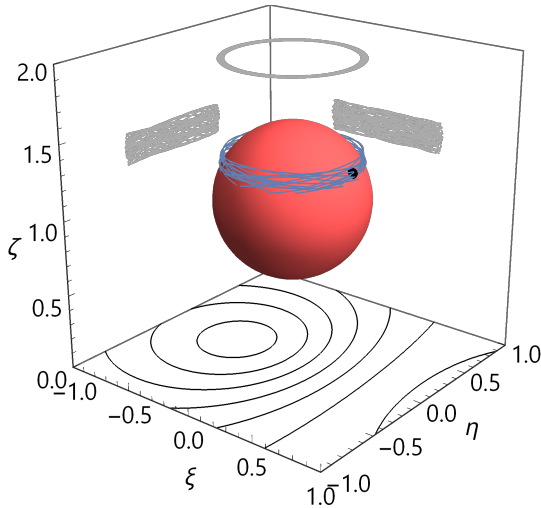
Figura A.186 Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



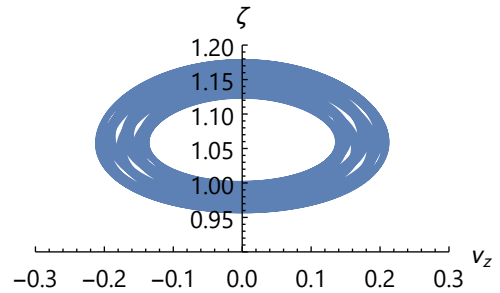
**Figura A.187** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



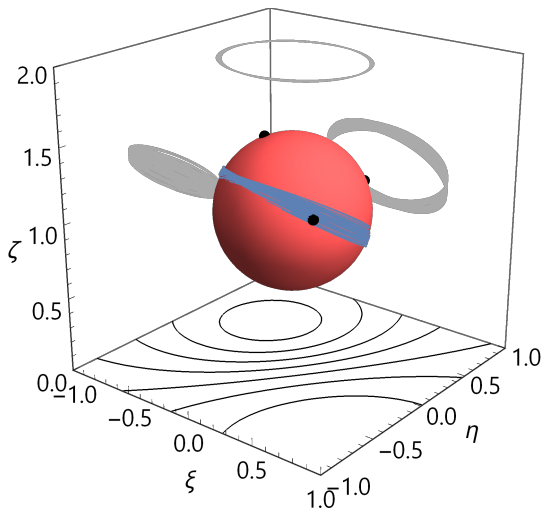
**Figura A.188** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



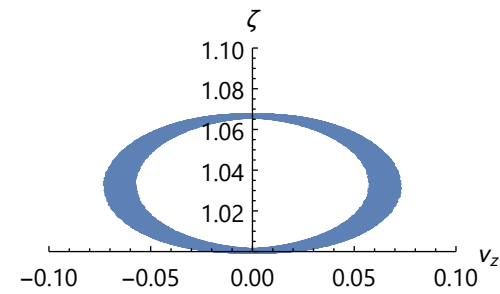
**Figura A.189** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



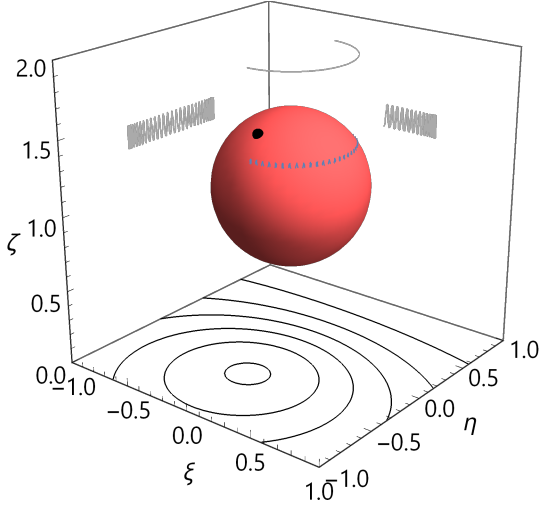
**Figura A.190** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



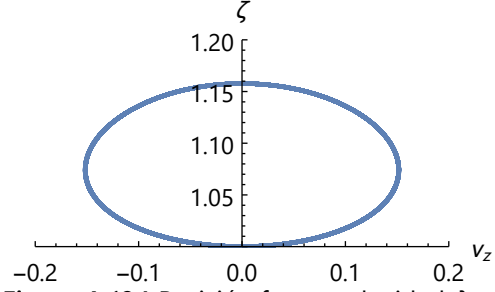
**Figura A.191** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



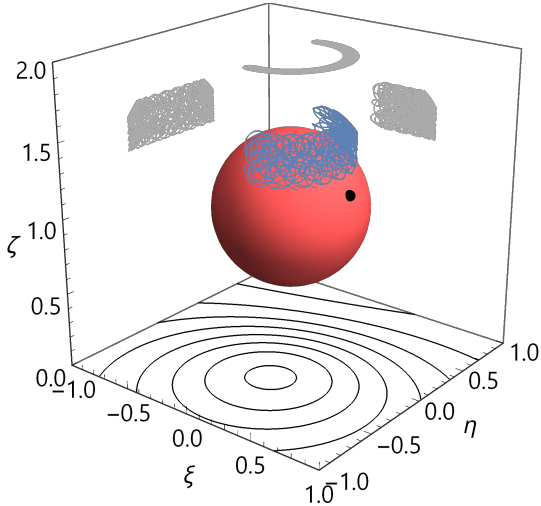
**Figura A.192** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



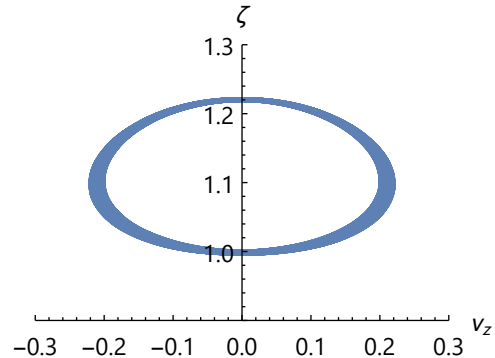
**Figura A.193** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



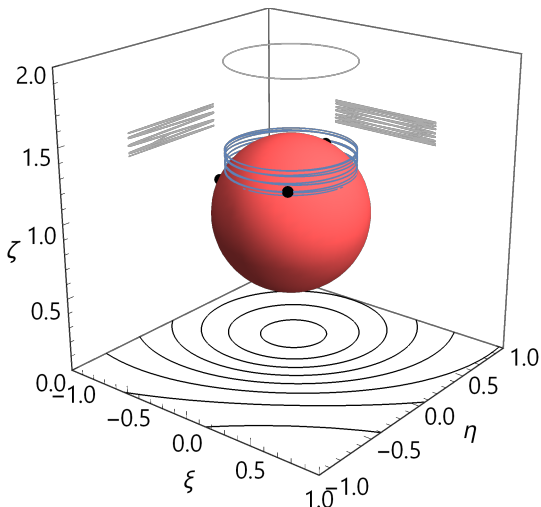
**Figura A.194** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



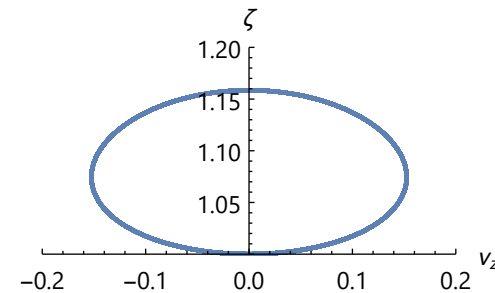
**Figura A.195** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



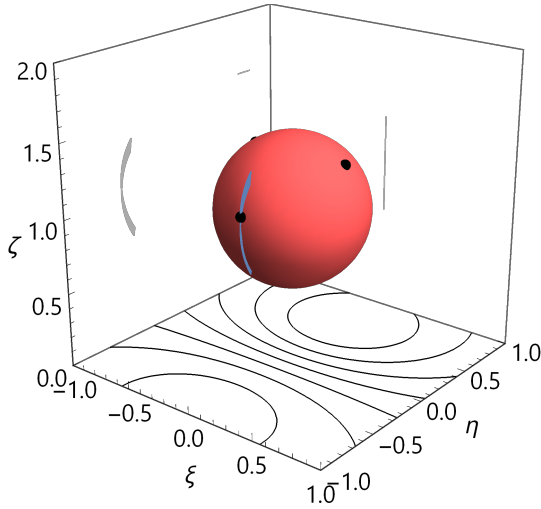
**Figura A.196** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



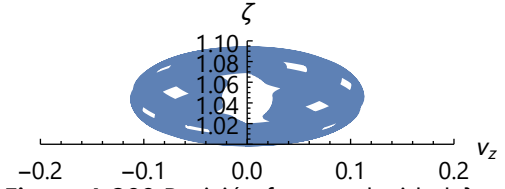
**Figura A.197** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



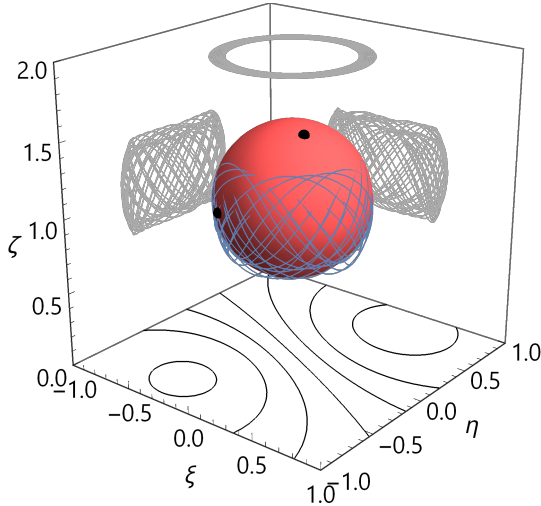
**Figura A.198** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



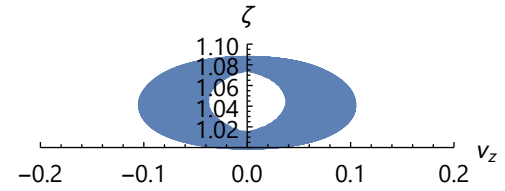
**Figura A.199** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



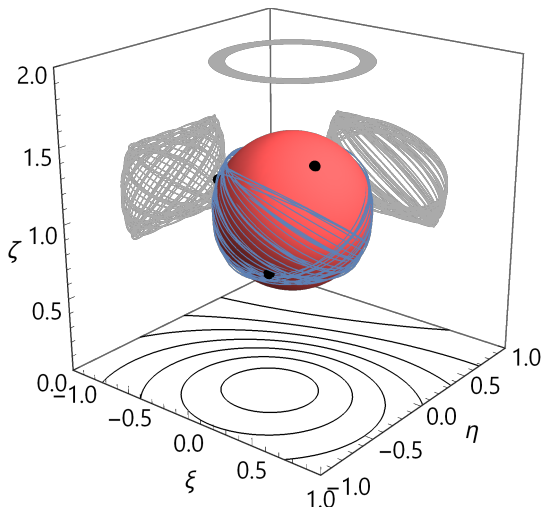
**Figura A.200** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



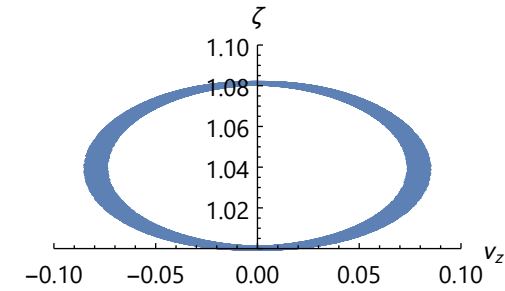
**Figura A.201** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



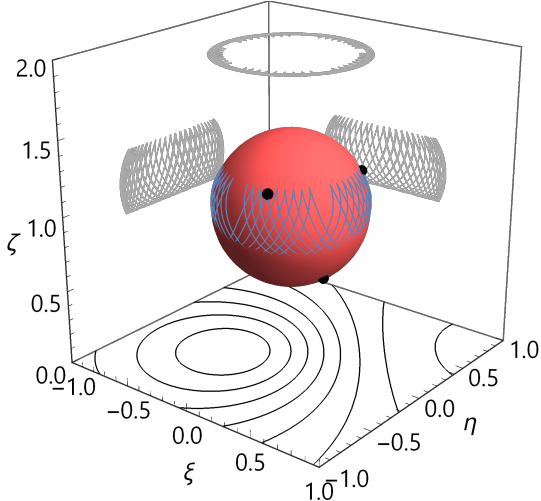
**Figura A.202** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



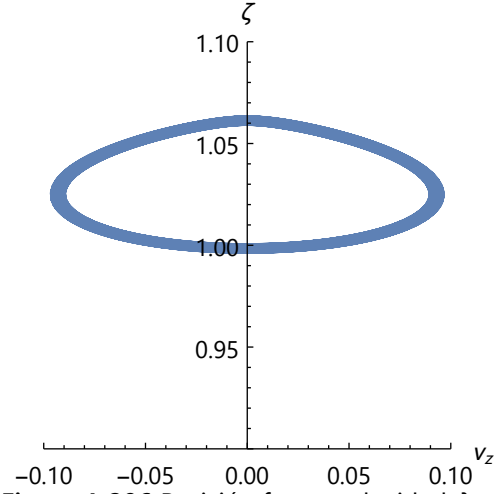
**Figura A.203** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



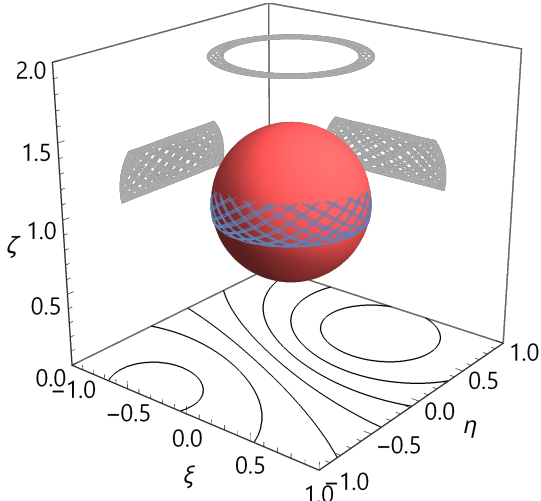
**Figura A.204** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



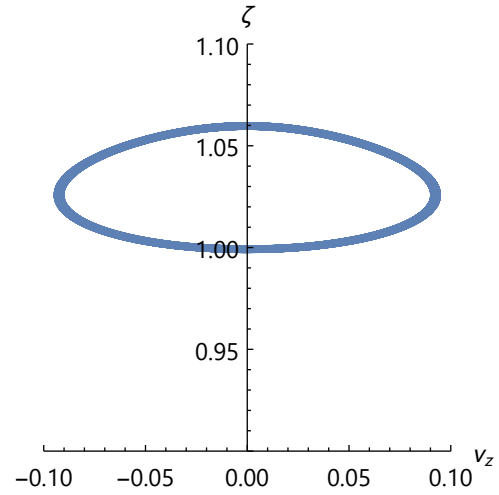
**Figura A.205** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



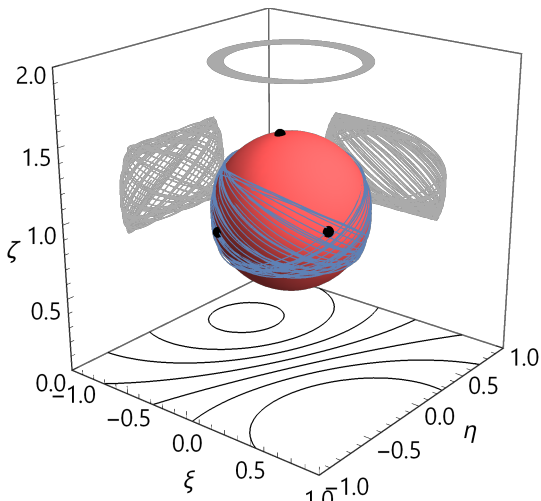
**Figura A.206** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



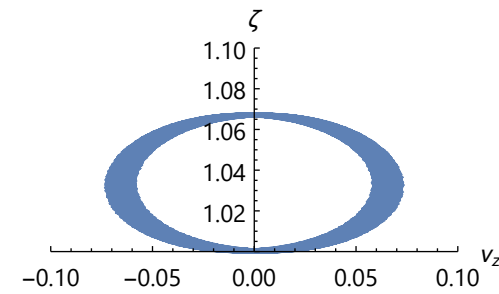
**Figura A.207** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



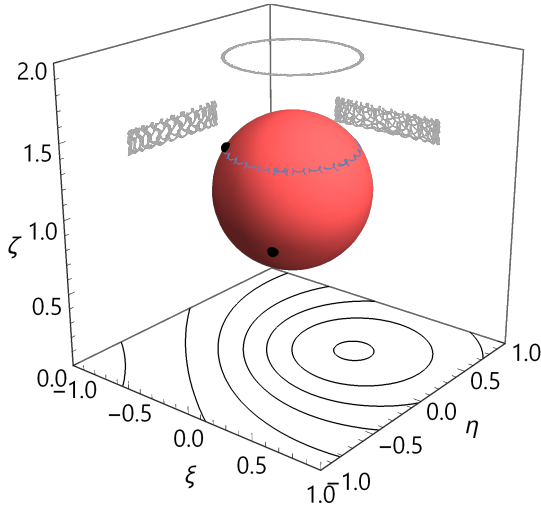
**Figura A.208** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



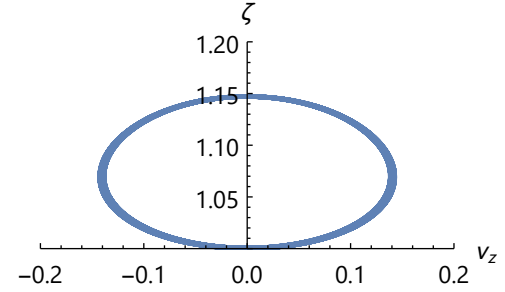
**Figura A.209** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



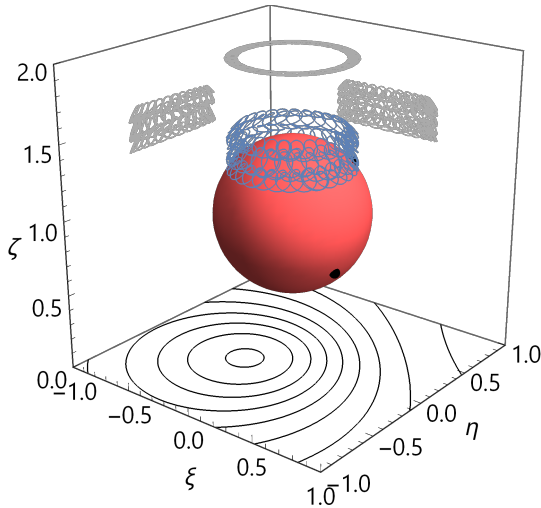
**Figura A.210** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



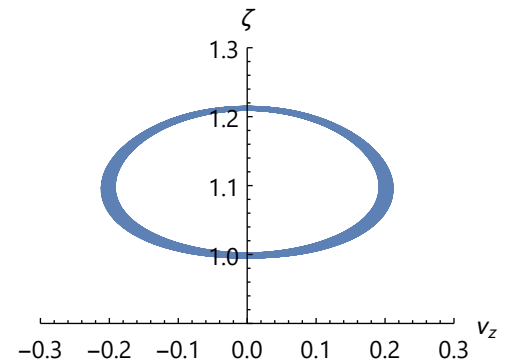
**Figura A.211** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



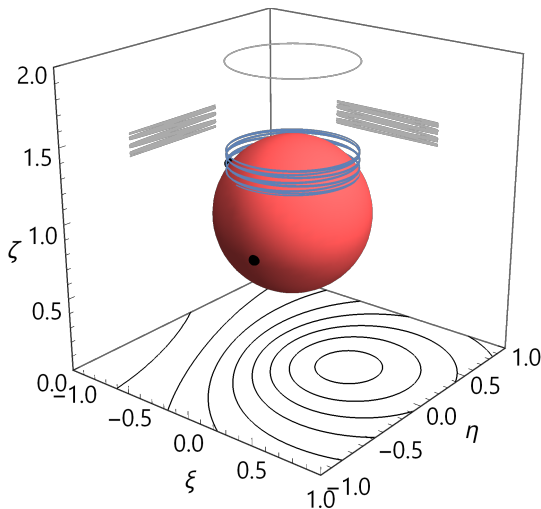
**Figura A.212** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



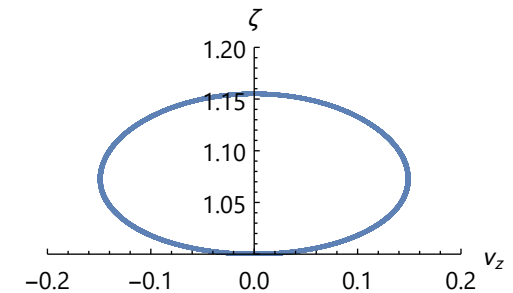
**Figura A.213** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



**Figura A.214** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

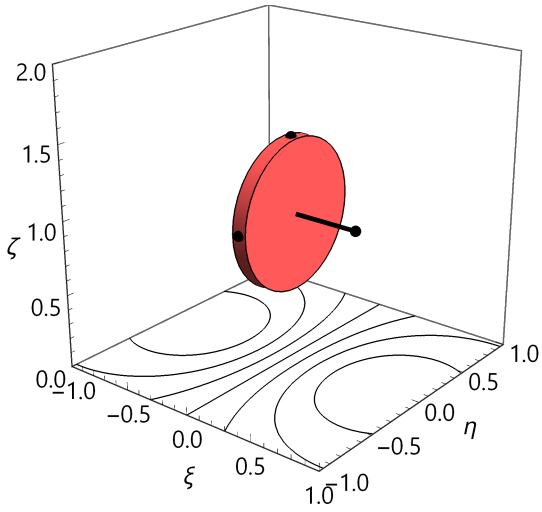


**Figura A.215** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$

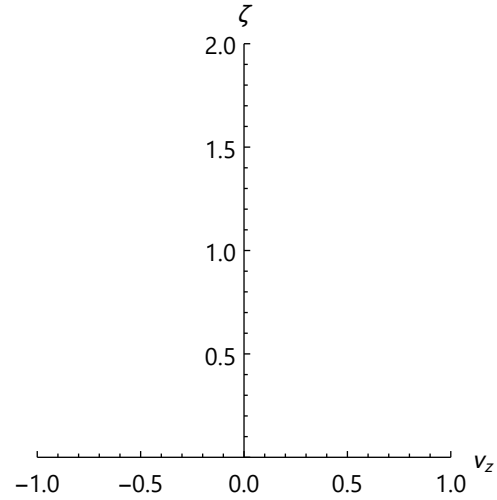


**Figura A.216** Posición frente velocidad:  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$

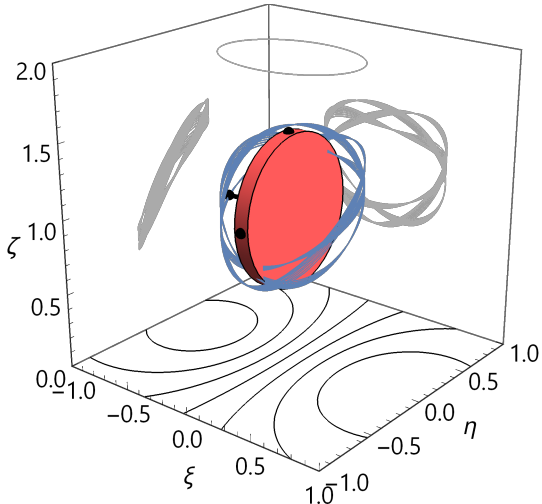
### A.3 Dipolo magnético con geometría de disco



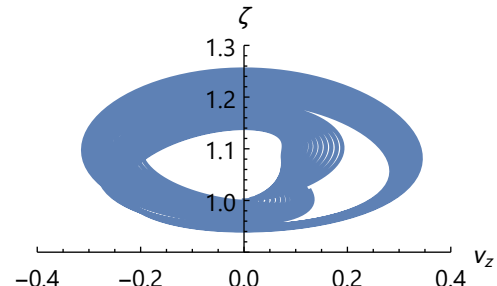
**Figura A.217** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



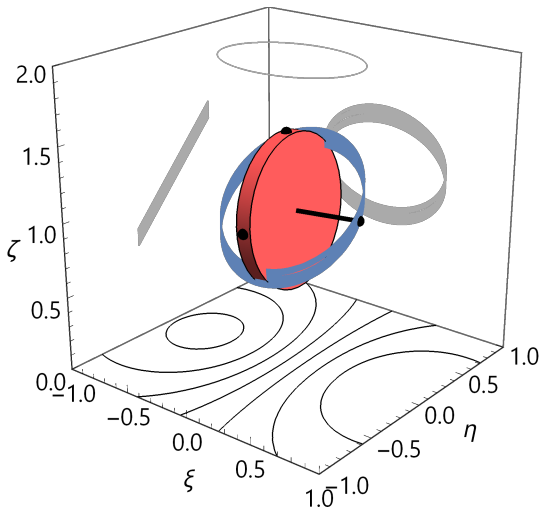
**Figura A.218** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



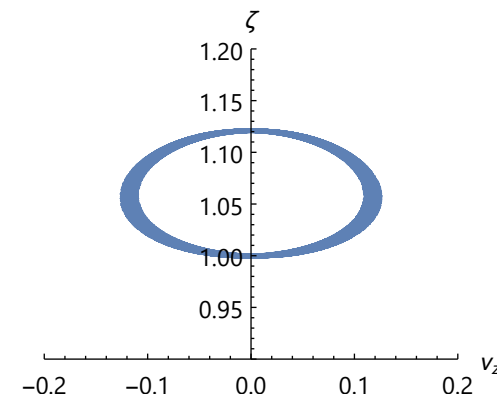
**Figura A.219** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



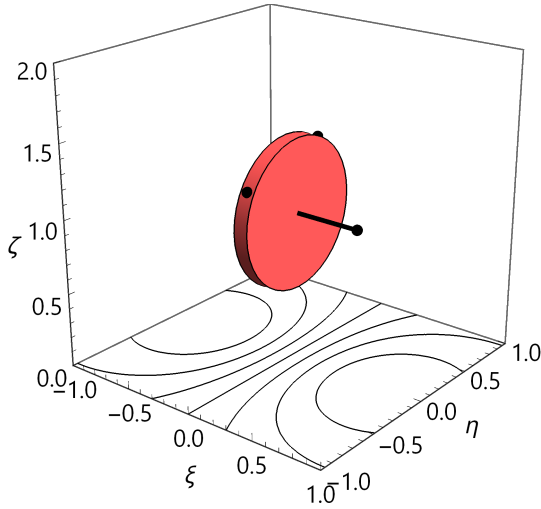
**Figura A.220** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



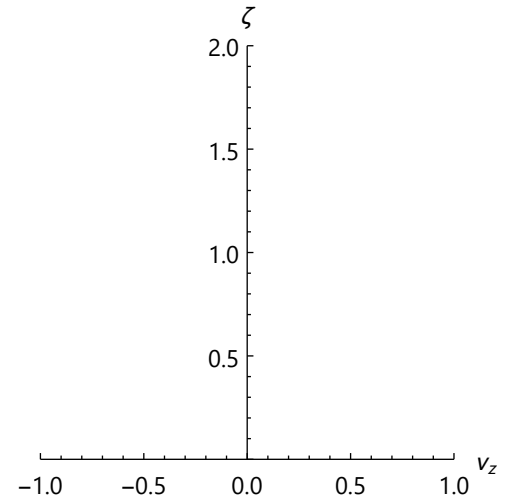
**Figura A.221** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



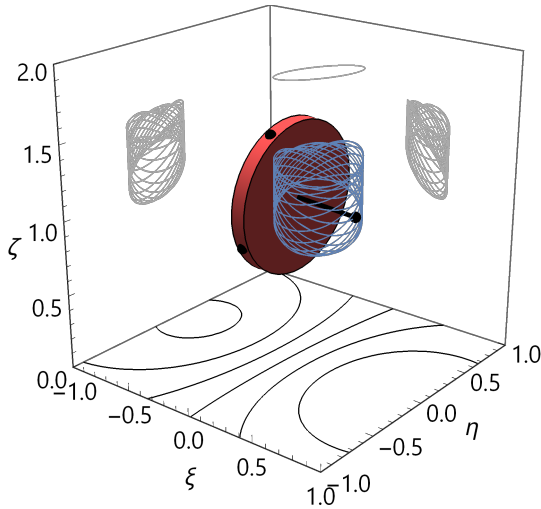
**Figura A.222** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



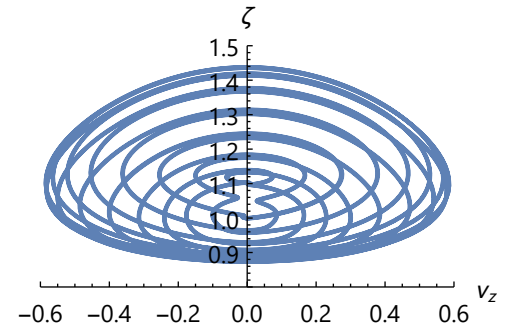
**Figura A.223** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



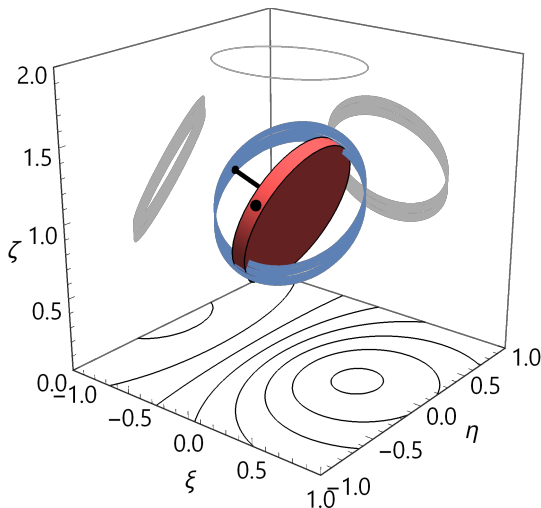
**Figura A.224** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



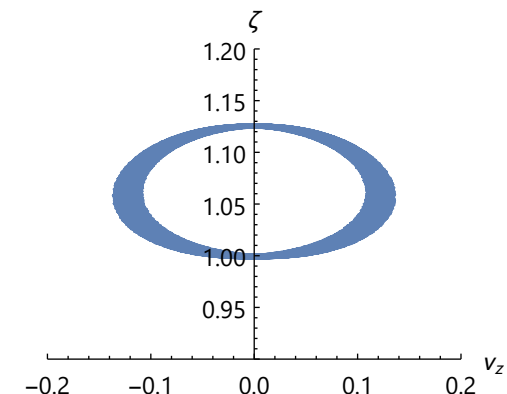
**Figura A.225** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



**Figura A.226** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

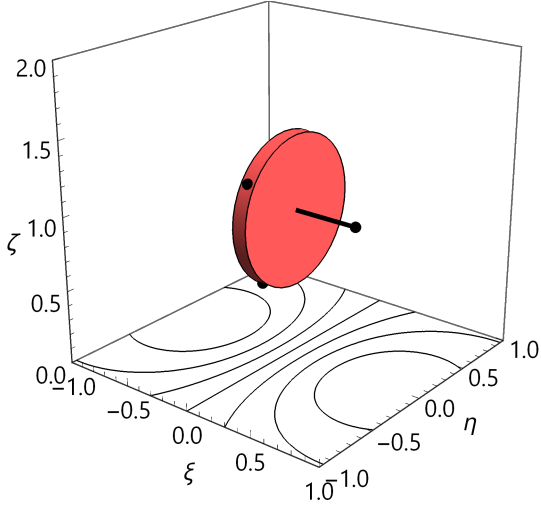


**Figura A.227** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$

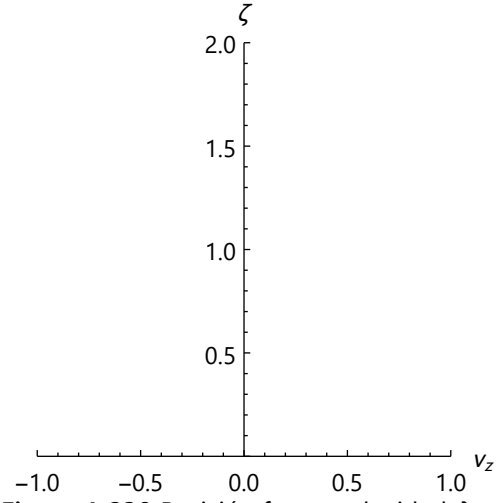


**Figura A.228** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$

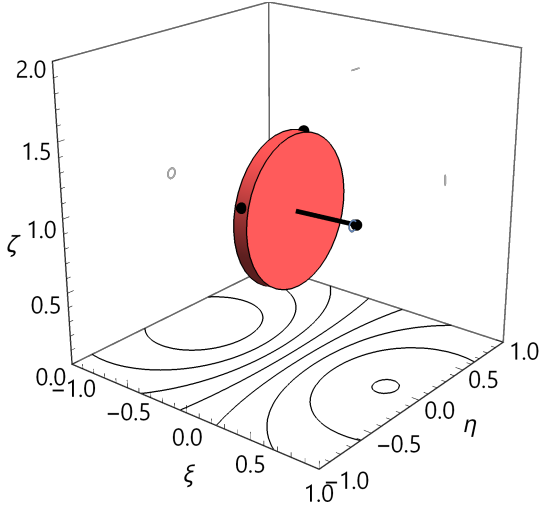




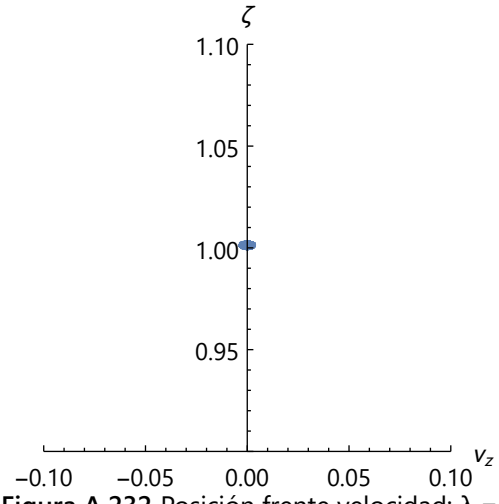
**Figura A.229** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



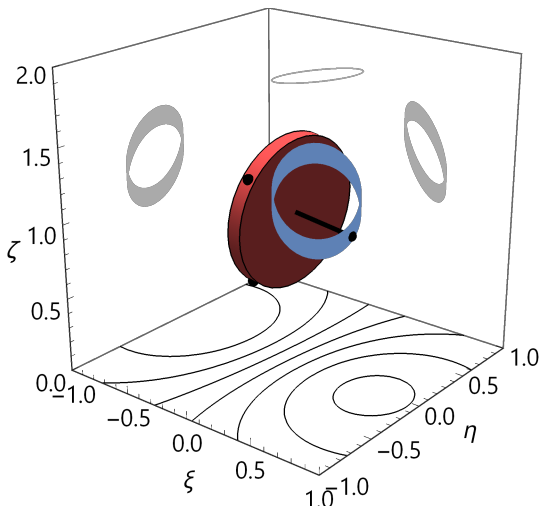
**Figura A.230** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



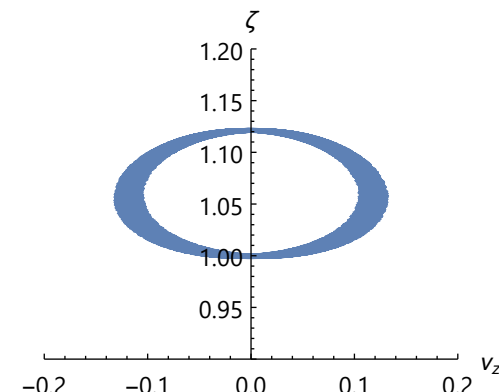
**Figura A.231** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



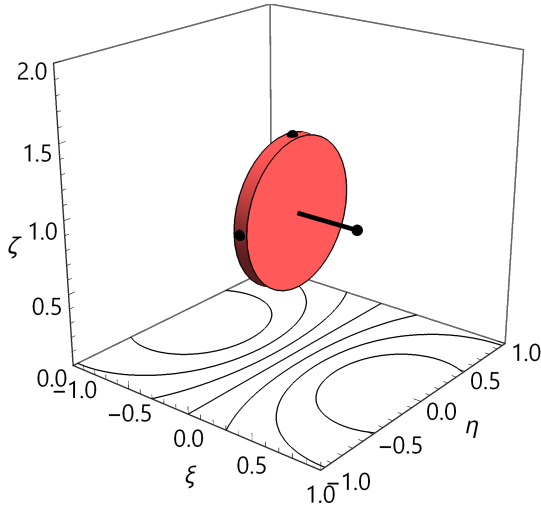
**Figura A.232** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



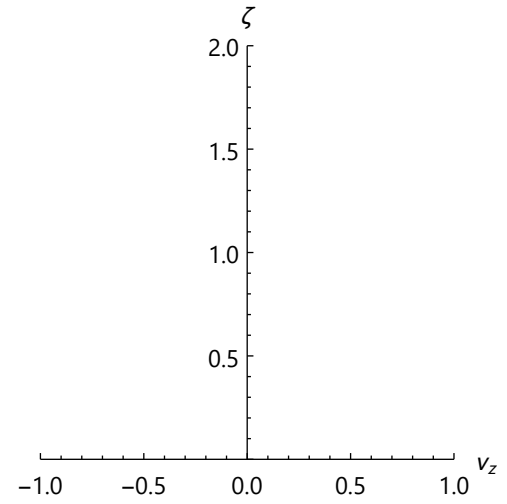
**Figura A.233** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



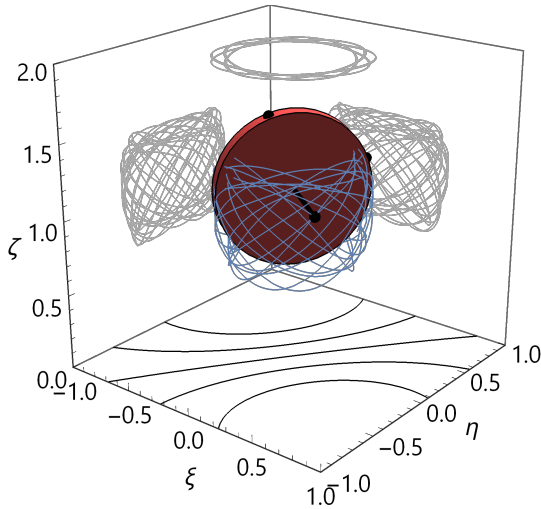
**Figura A.234** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



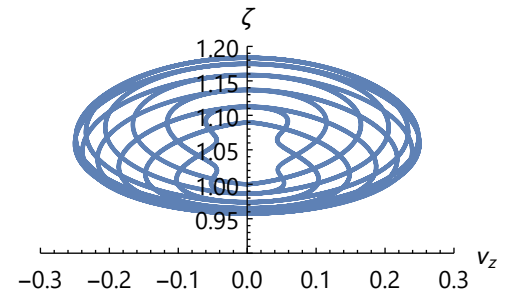
**Figura A.235** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



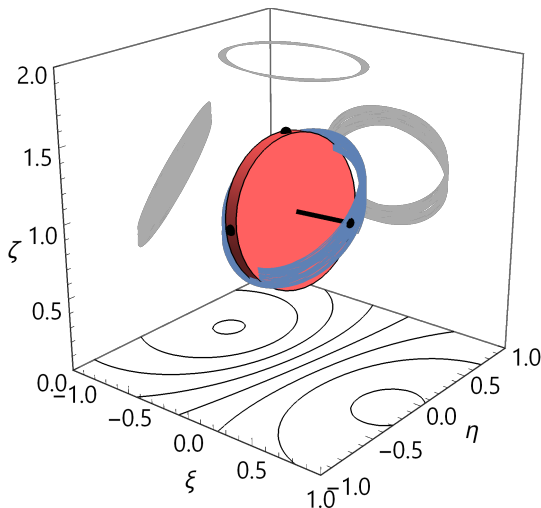
**Figura A.236** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



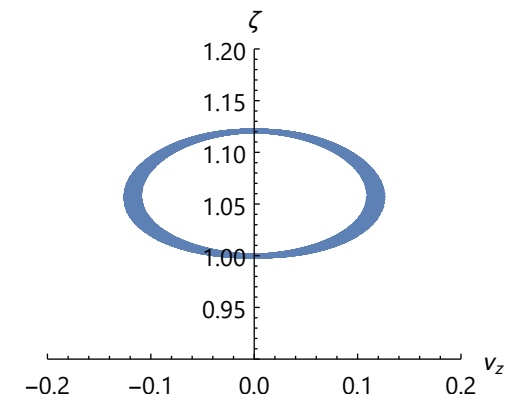
**Figura A.237** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



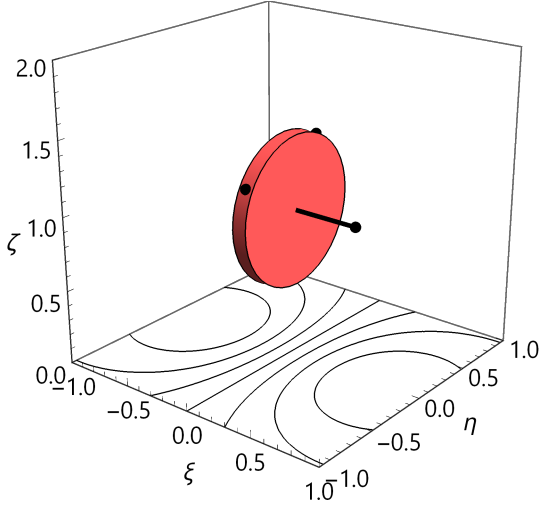
**Figura A.238** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



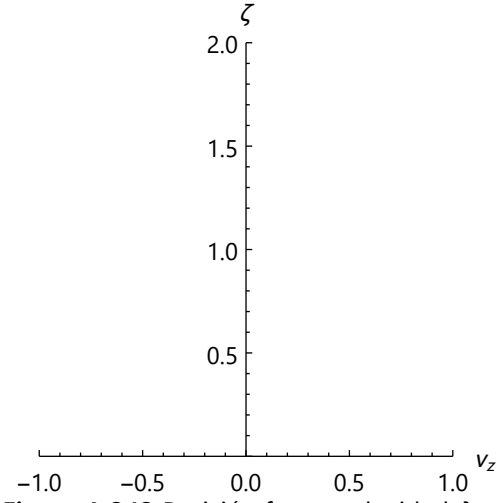
**Figura A.239** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



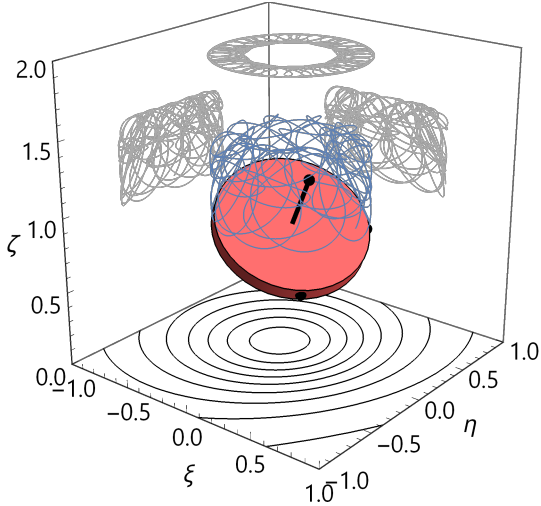
**Figura A.240** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



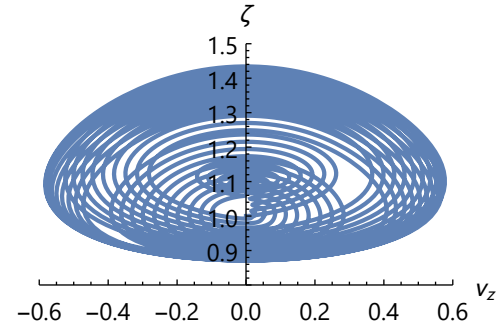
**Figura A.241** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



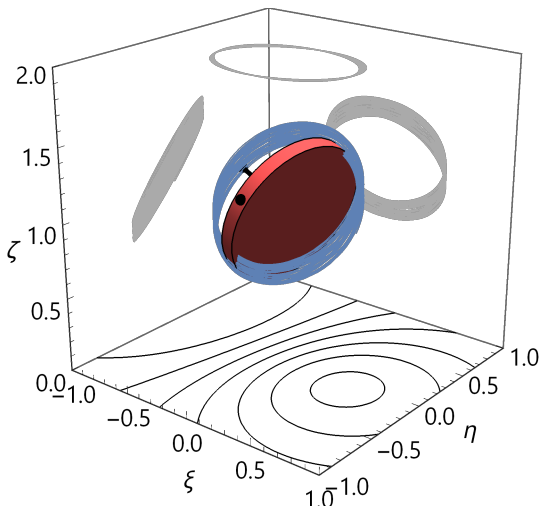
**Figura A.242** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



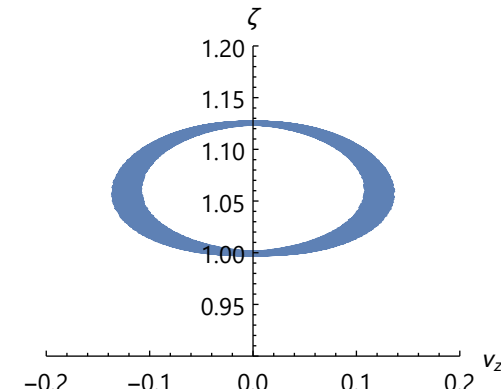
**Figura A.243** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



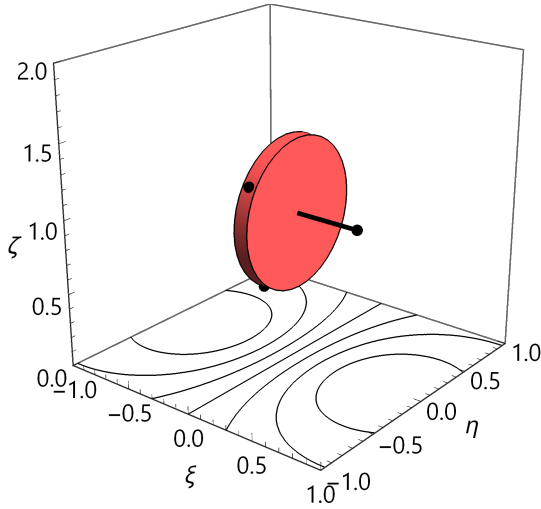
**Figura A.244** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



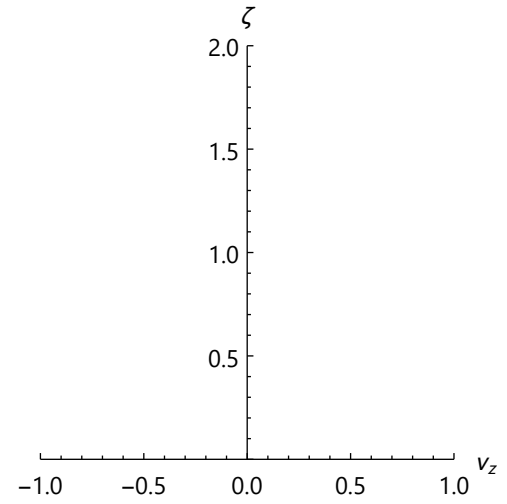
**Figura A.245** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



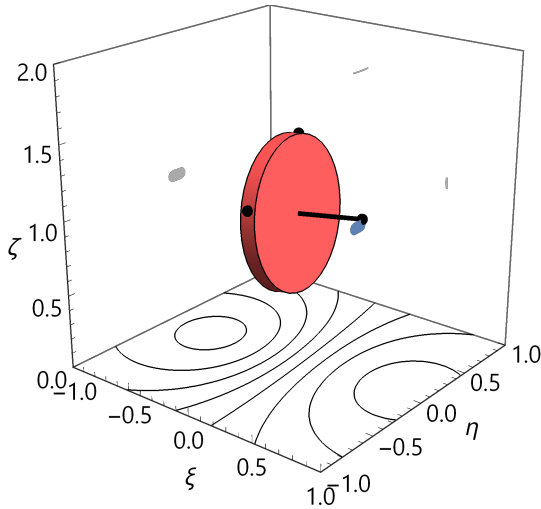
**Figura A.246** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



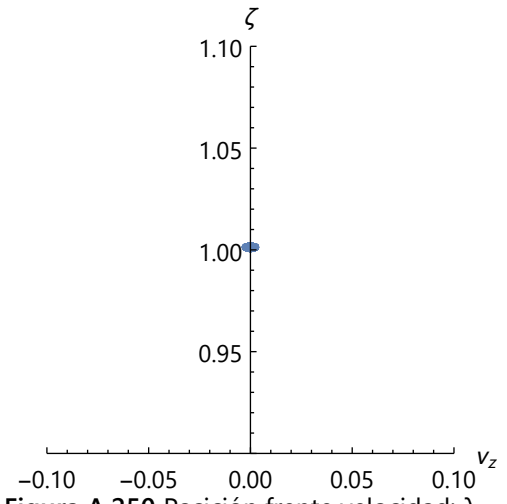
**Figura A.247** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



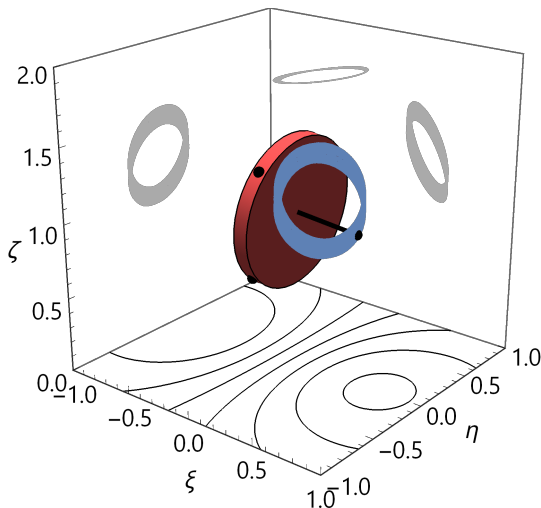
**Figura A.248** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



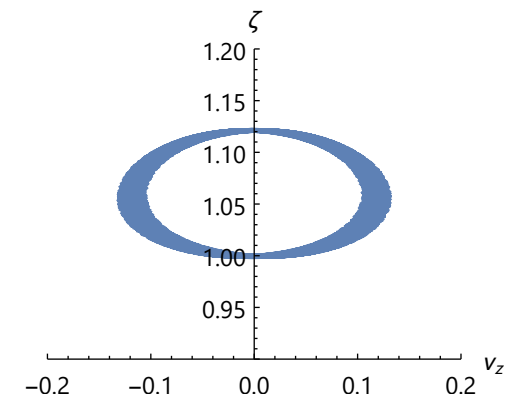
**Figura A.249** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



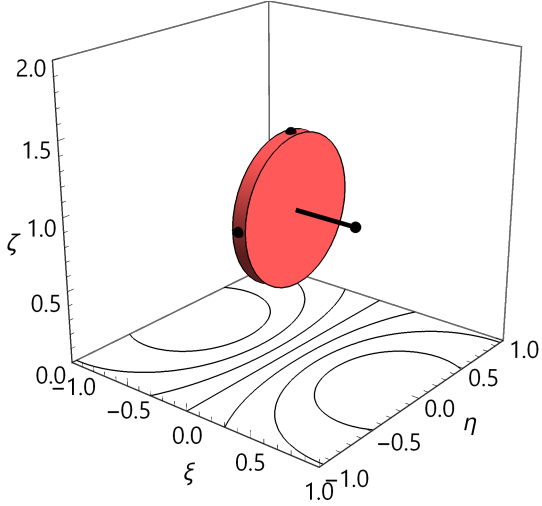
**Figura A.250** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



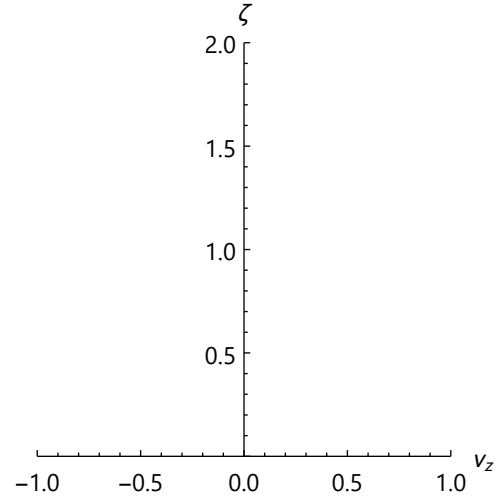
**Figura A.251** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



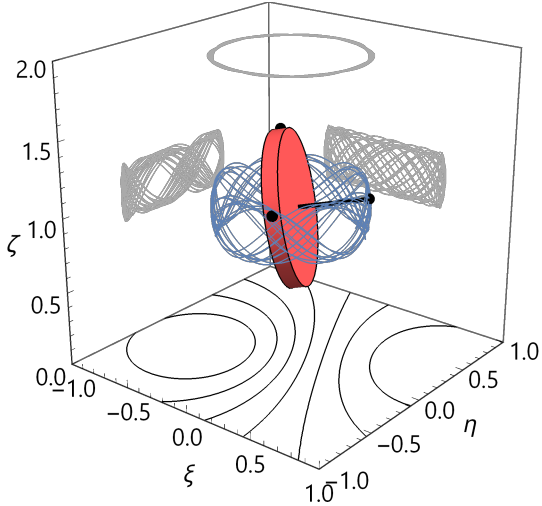
**Figura A.252** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



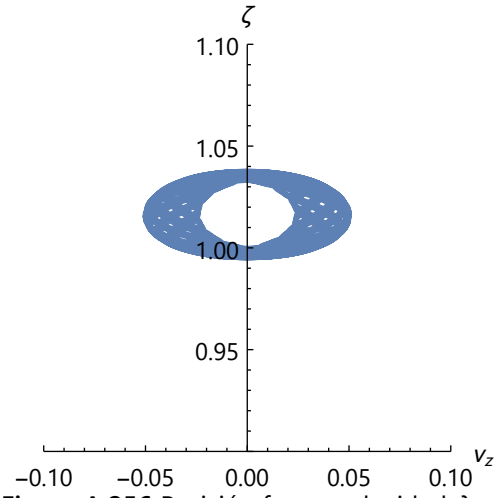
**Figura A.253** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



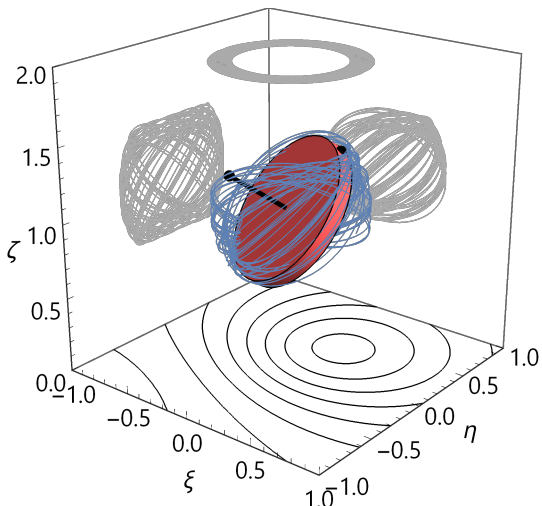
**Figura A.254** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



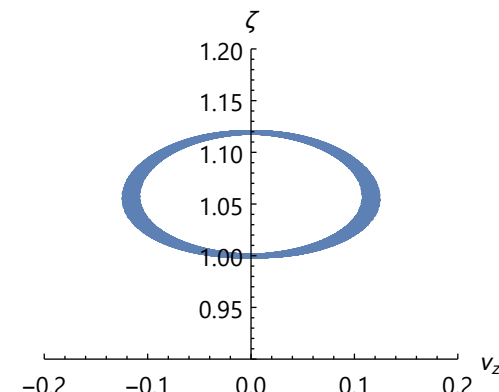
**Figura A.255** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



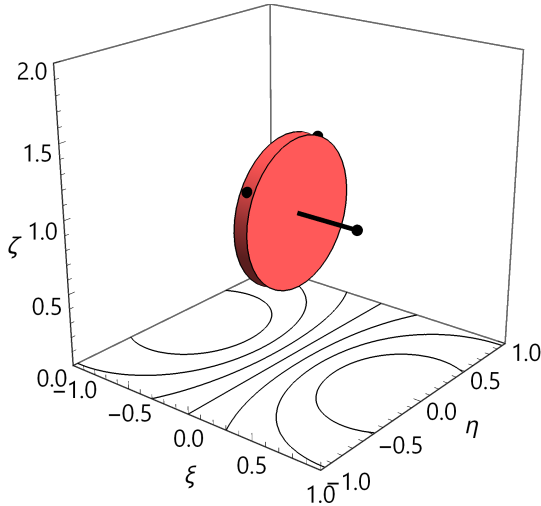
**Figura A.256** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



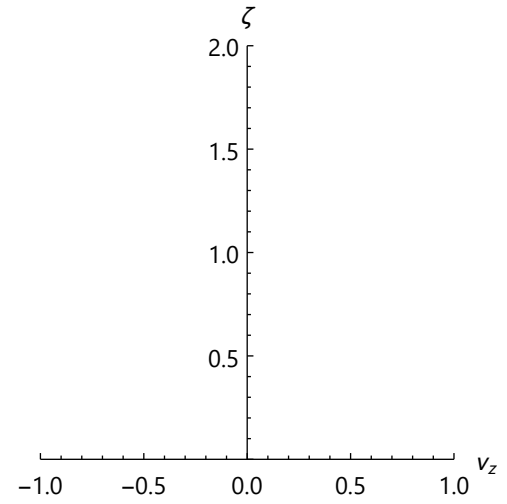
**Figura A.257** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



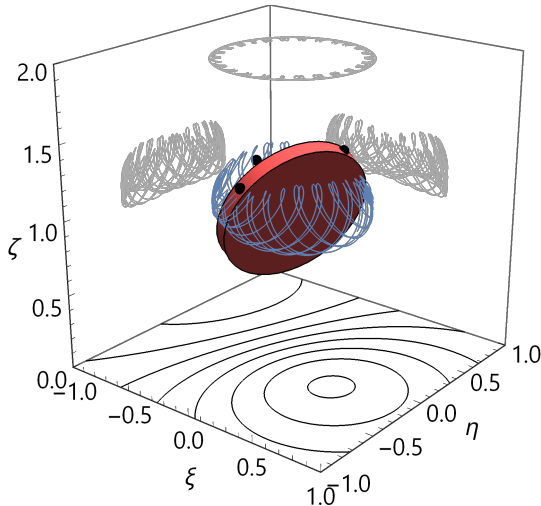
**Figura A.258** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



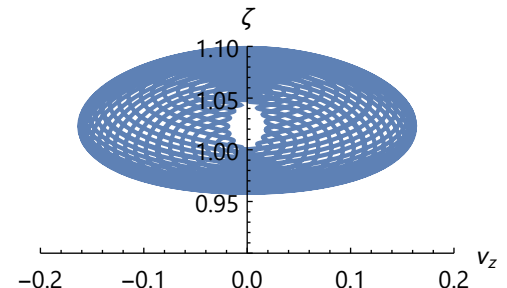
**Figura A.259** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



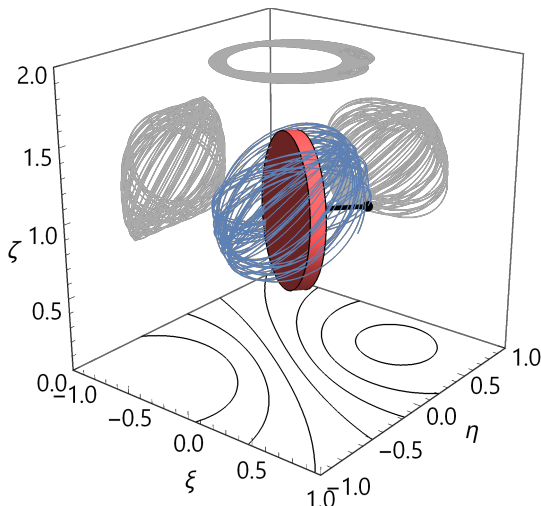
**Figura A.260** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



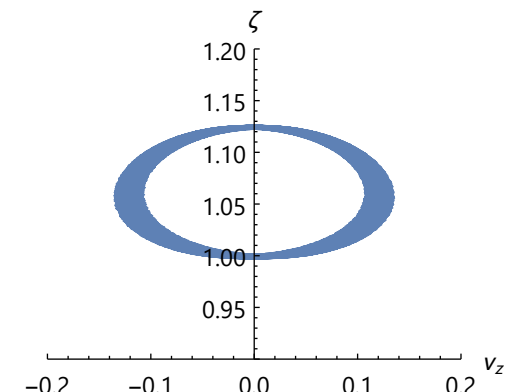
**Figura A.261** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



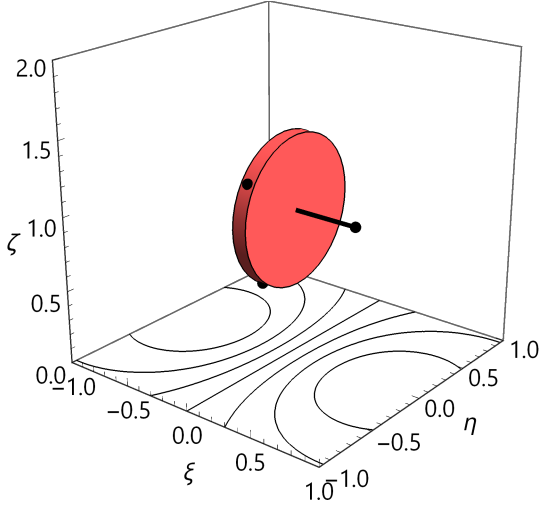
**Figura A.262** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



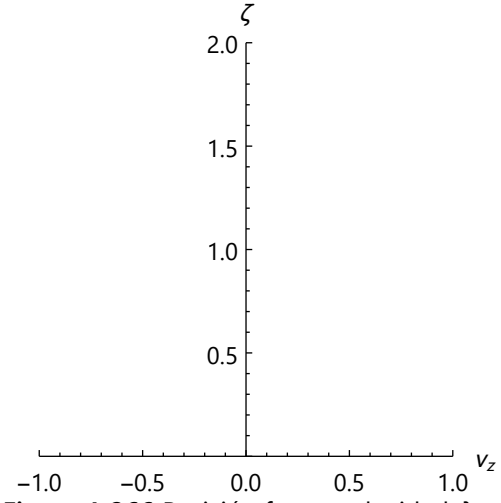
**Figura A.263** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



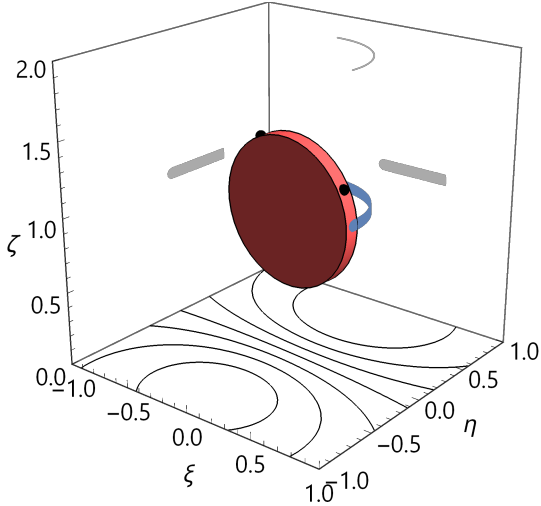
**Figura A.264** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



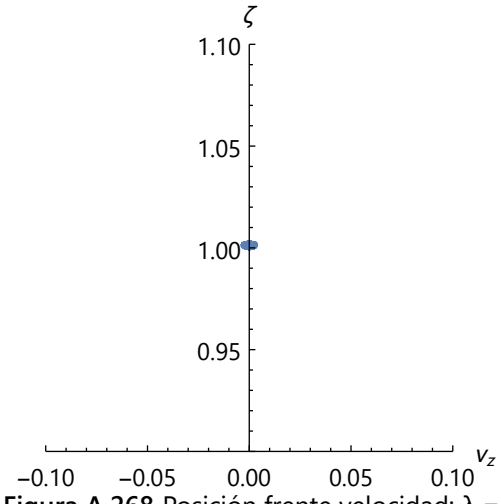
**Figura A.265** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



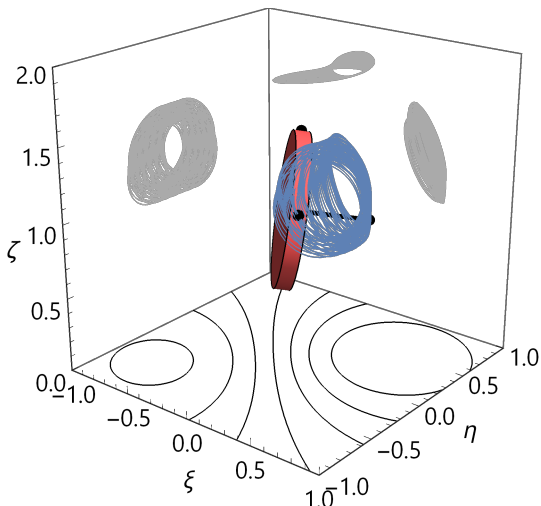
**Figura A.266** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



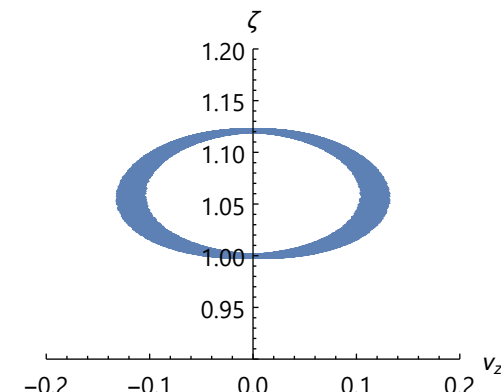
**Figura A.267** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



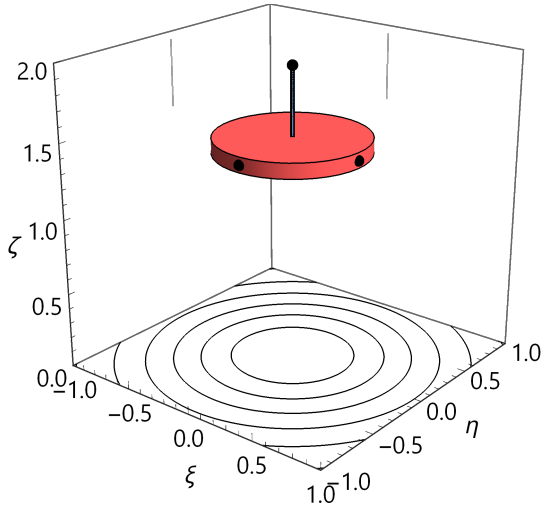
**Figura A.268** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



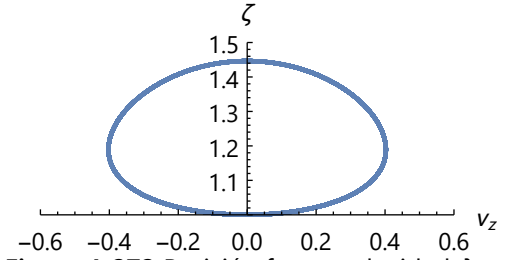
**Figura A.269** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



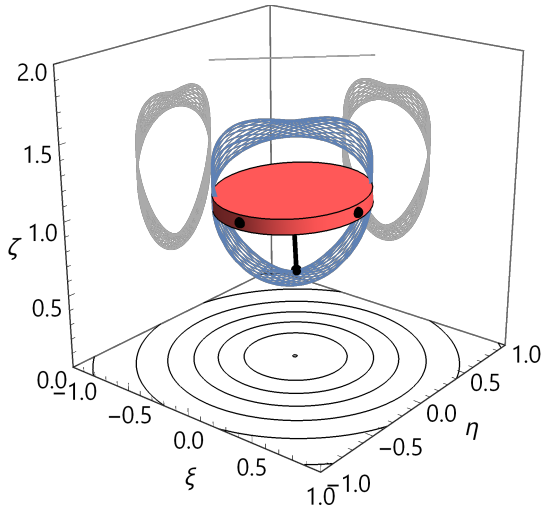
**Figura A.270** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{X}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



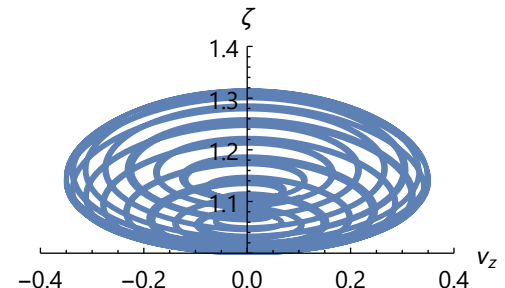
**Figura A.271** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



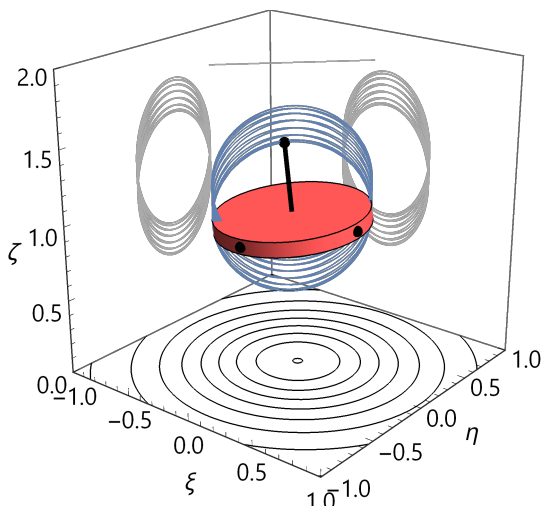
**Figura A.272** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



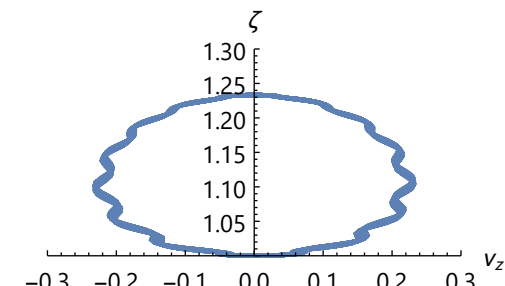
**Figura A.273** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



**Figura A.274** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$

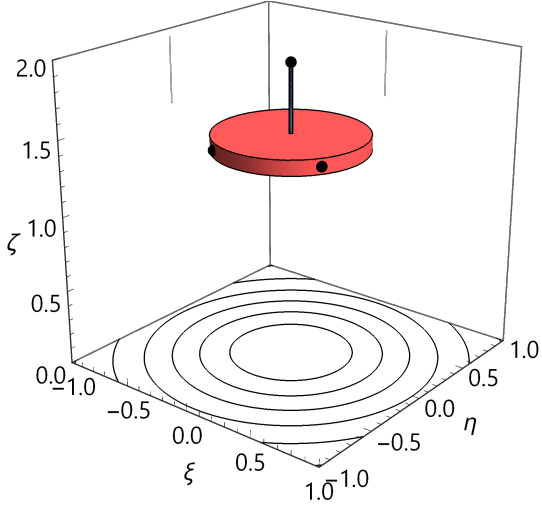


**Figura A.275** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

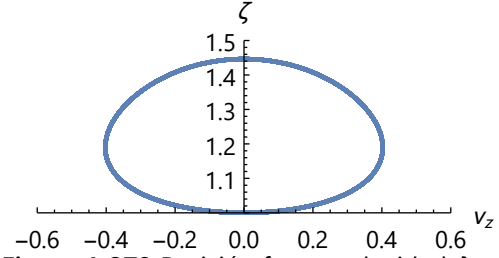


**Figura A.276** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

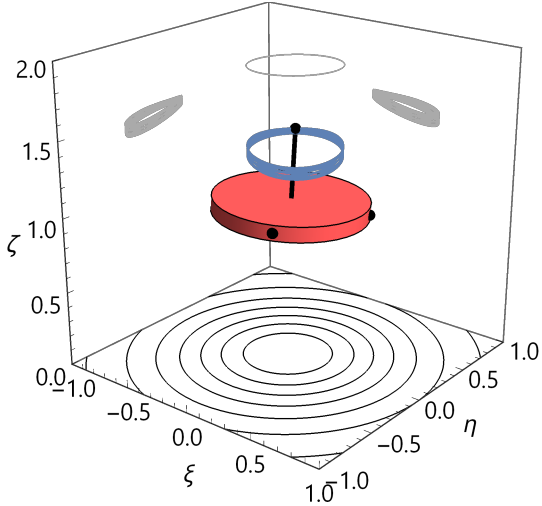




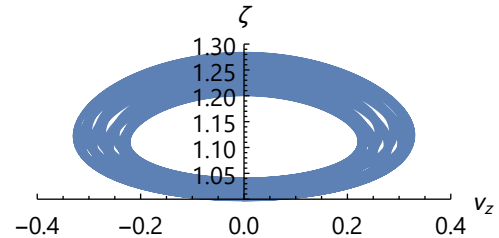
**Figura A.277** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



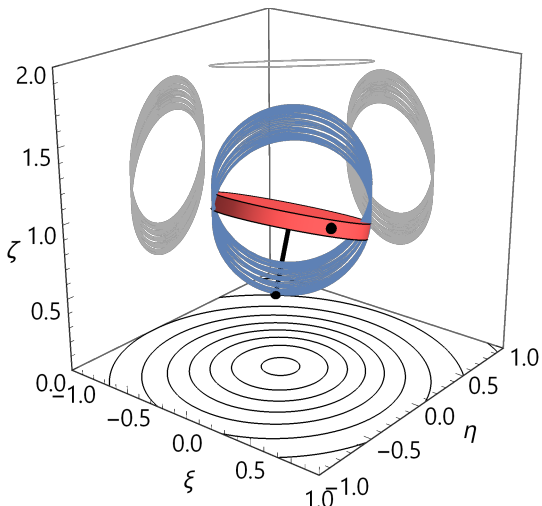
**Figura A.278** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



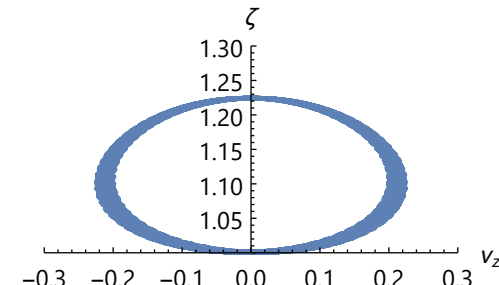
**Figura A.279** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



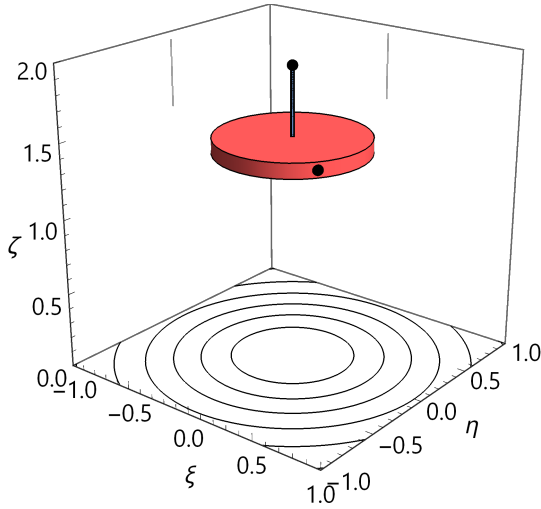
**Figura A.280** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



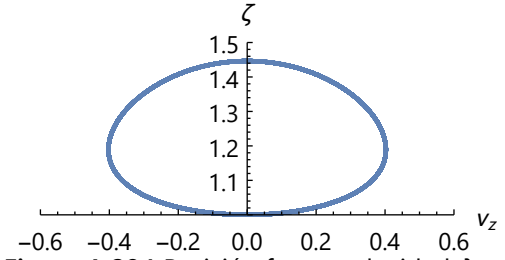
**Figura A.281** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



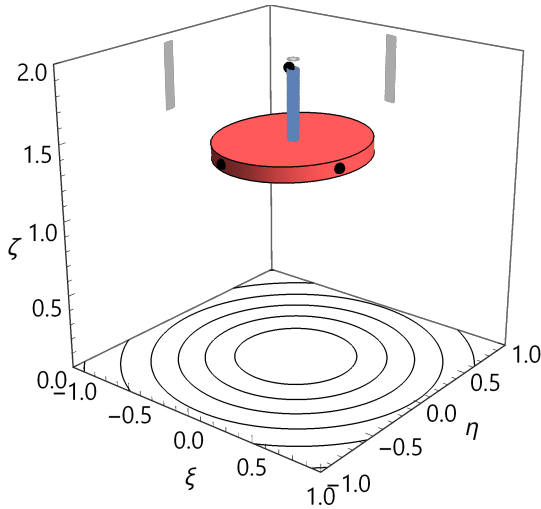
**Figura A.282** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



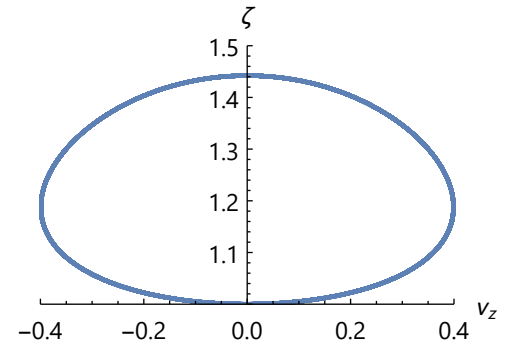
**Figura A.283** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



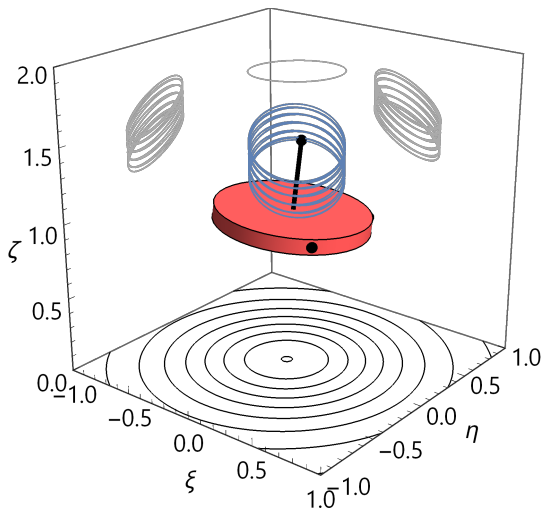
**Figura A.284** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



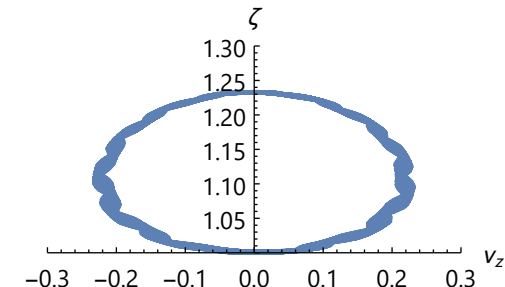
**Figura A.285** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



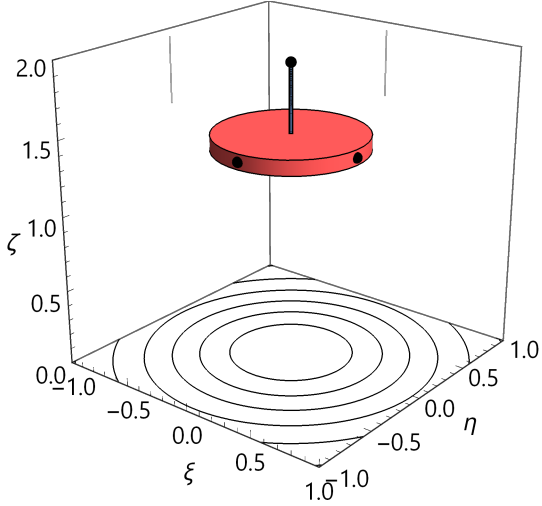
**Figura A.286** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



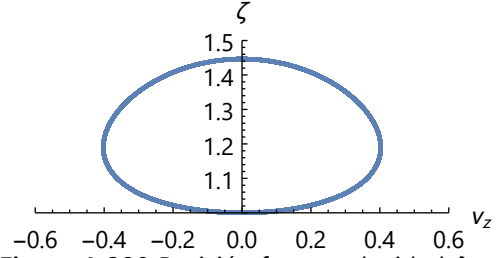
**Figura A.287** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



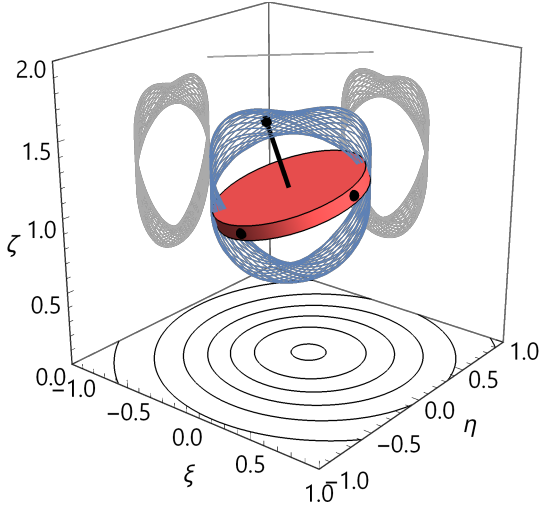
**Figura A.288** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



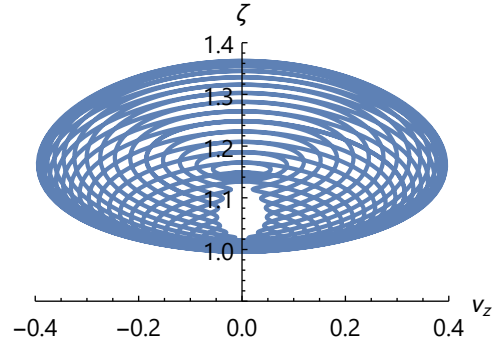
**Figura A.289** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



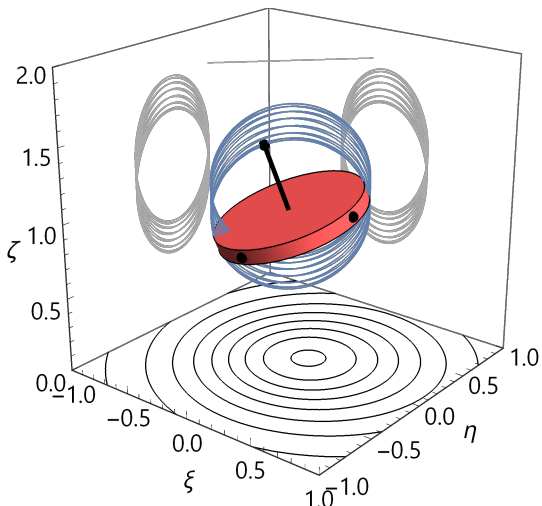
**Figura A.290** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



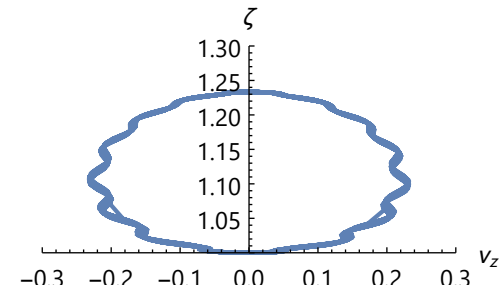
**Figura A.291** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



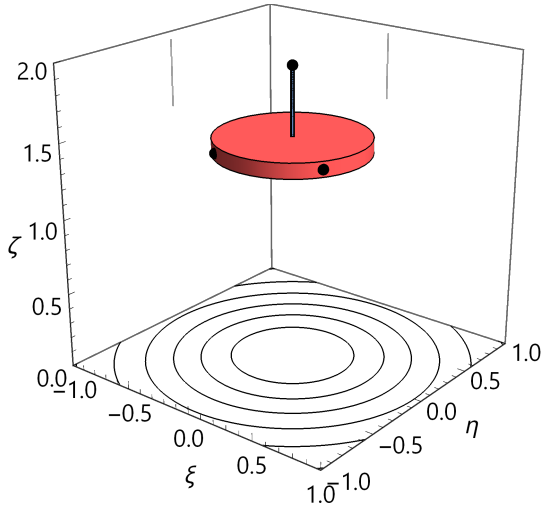
**Figura A.292** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



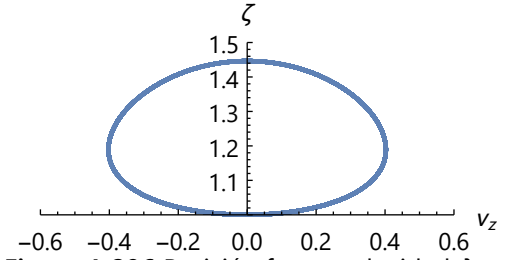
**Figura A.293** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



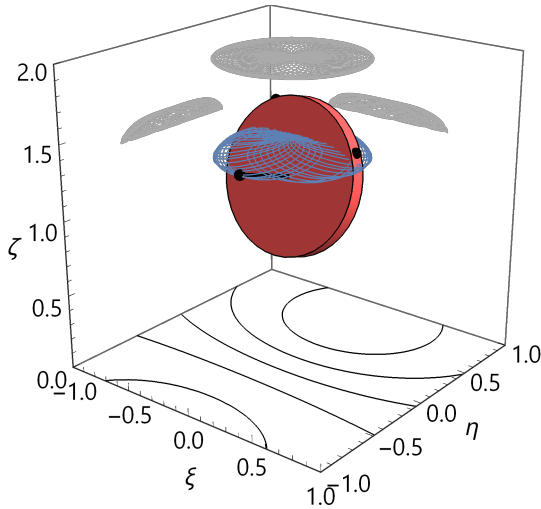
**Figura A.294** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



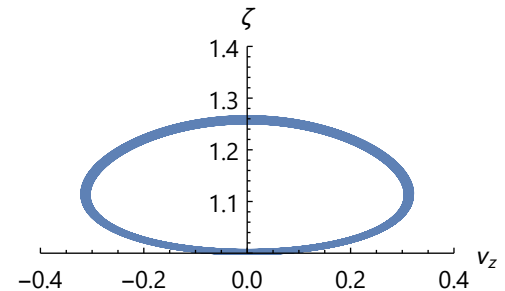
**Figura A.295** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



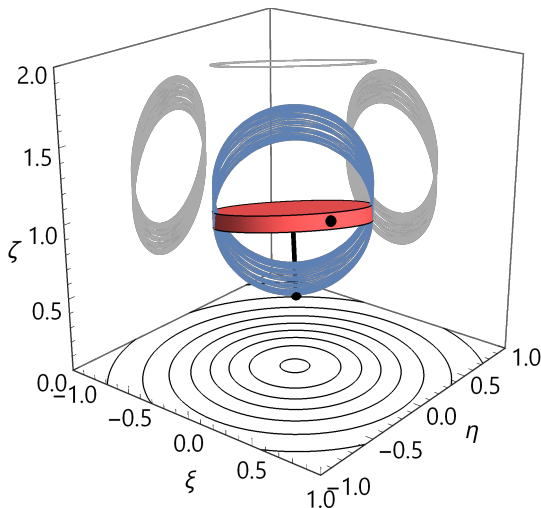
**Figura A.296** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



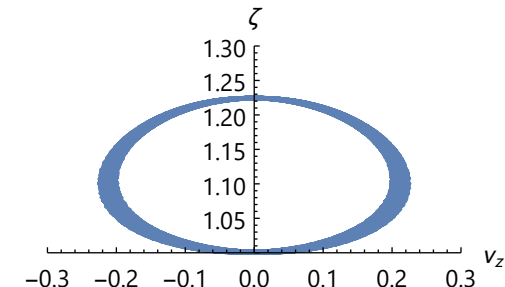
**Figura A.297** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



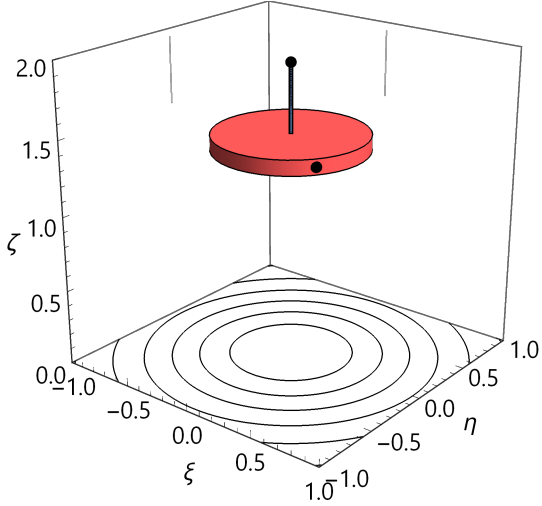
**Figura A.298** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



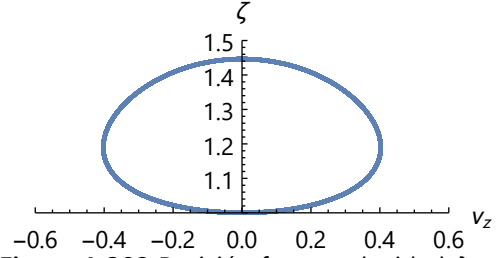
**Figura A.299** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



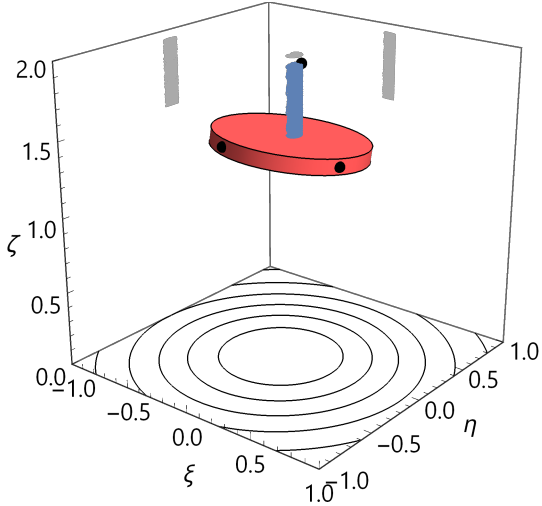
**Figura A.300** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



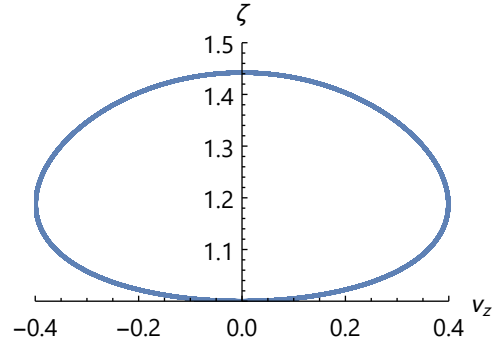
**Figura A.301** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



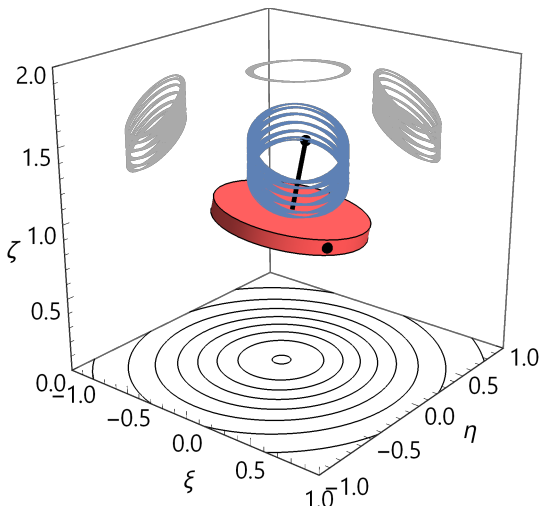
**Figura A.302** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



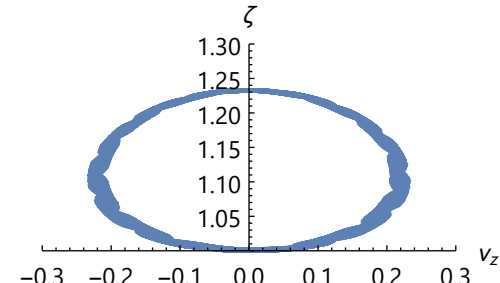
**Figura A.303** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



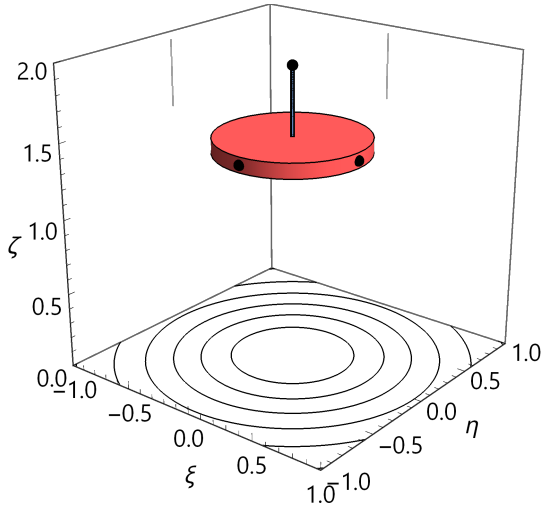
**Figura A.304** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



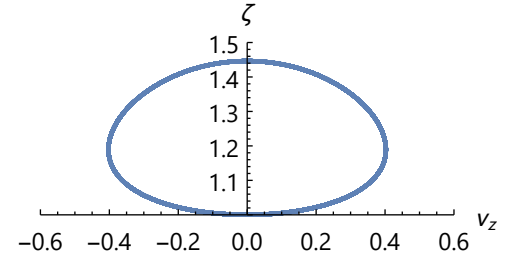
**Figura A.305** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



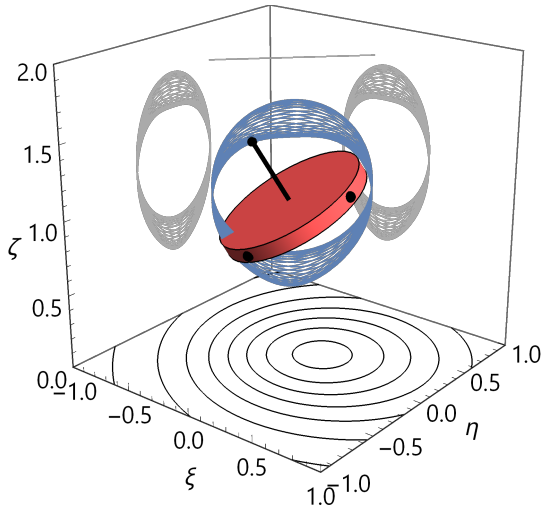
**Figura A.306** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



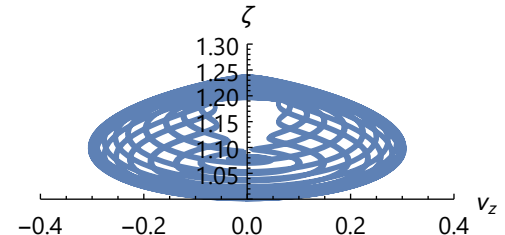
**Figura A.307** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



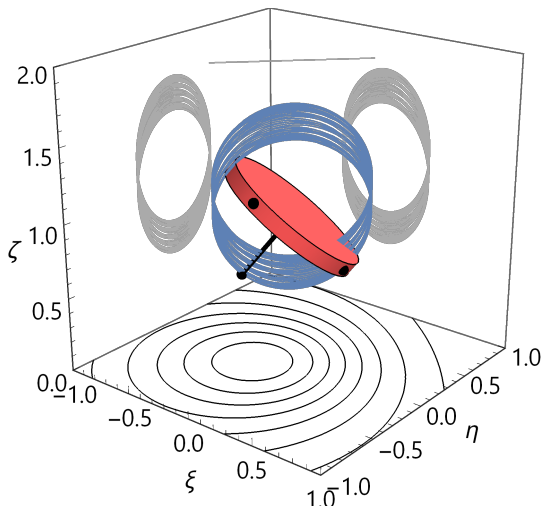
**Figura A.308** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



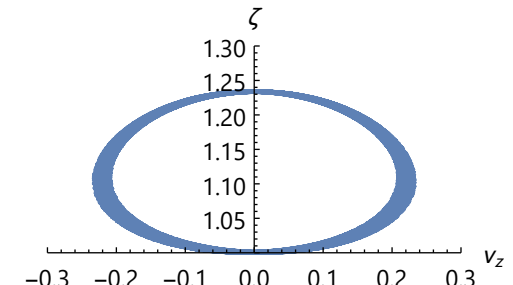
**Figura A.309** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



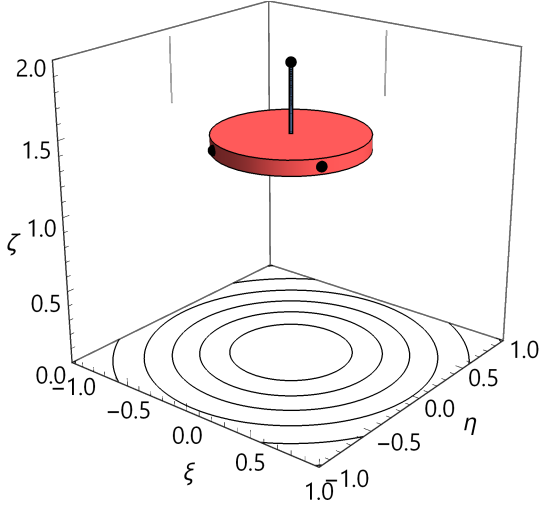
**Figura A.310** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



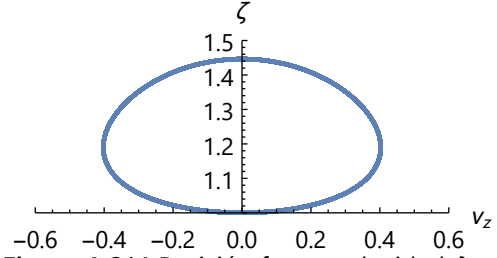
**Figura A.311** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



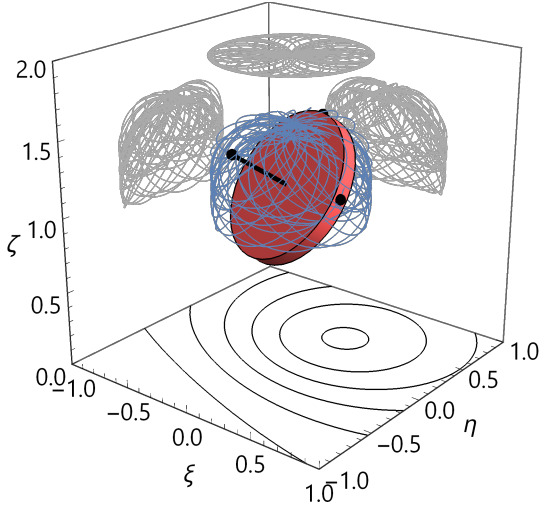
**Figura A.312** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



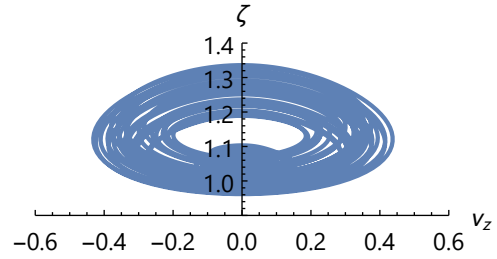
**Figura A.313** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



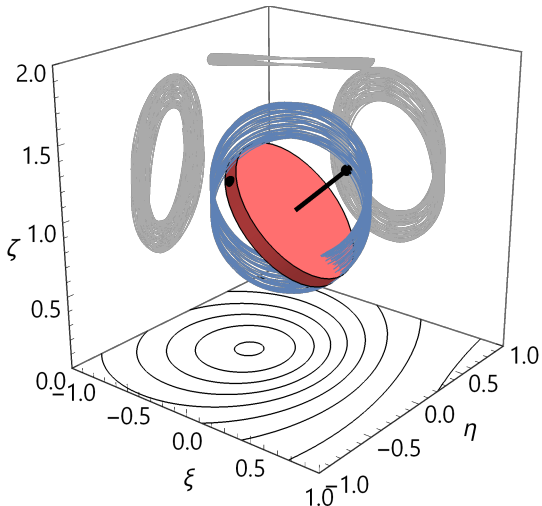
**Figura A.314** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



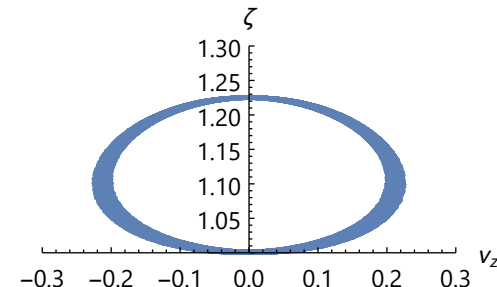
**Figura A.315** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



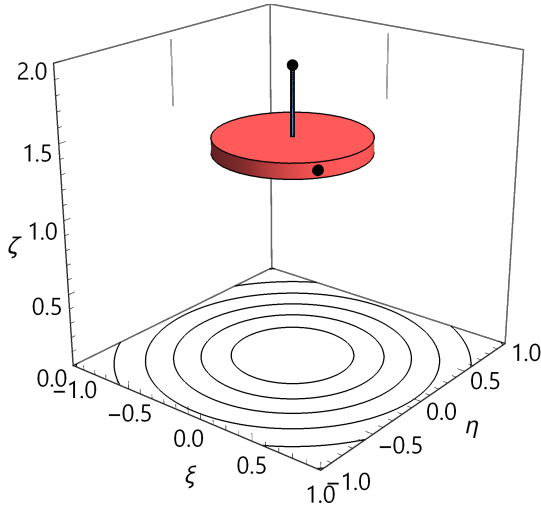
**Figura A.316** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



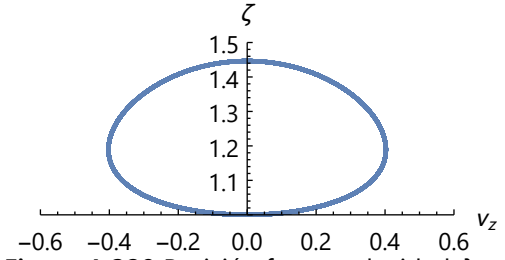
**Figura A.317** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



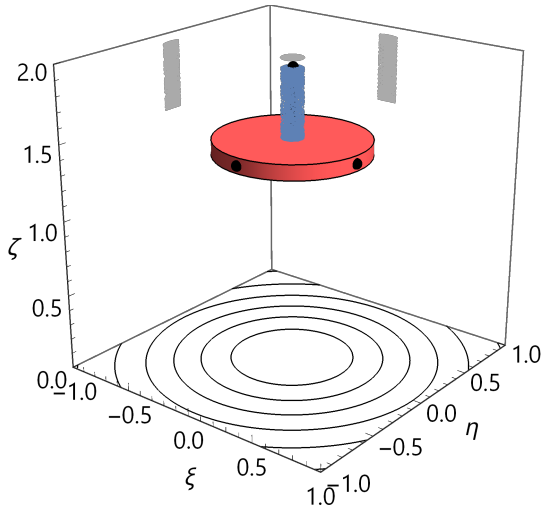
**Figura A.318** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



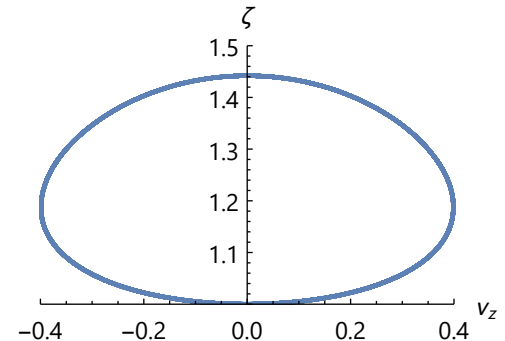
**Figura A.319** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



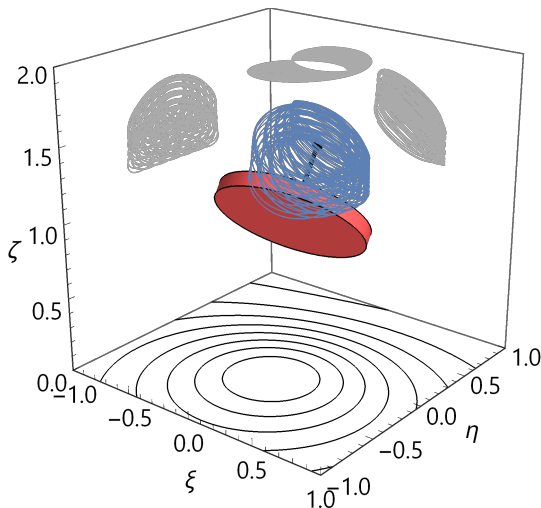
**Figura A.320** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



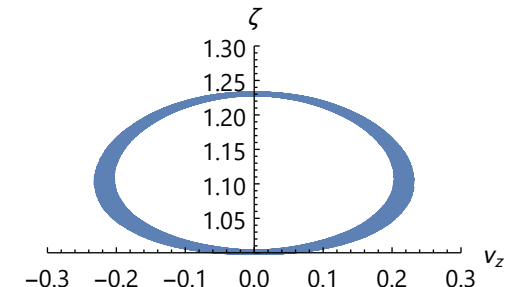
**Figura A.321** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



**Figura A.322** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$

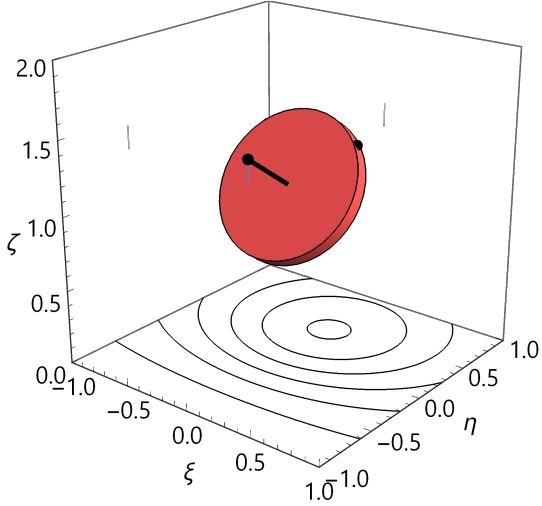


**Figura A.323** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

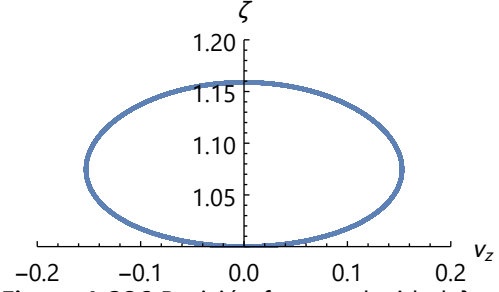


**Figura A.324** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{z}}(0) = 1$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

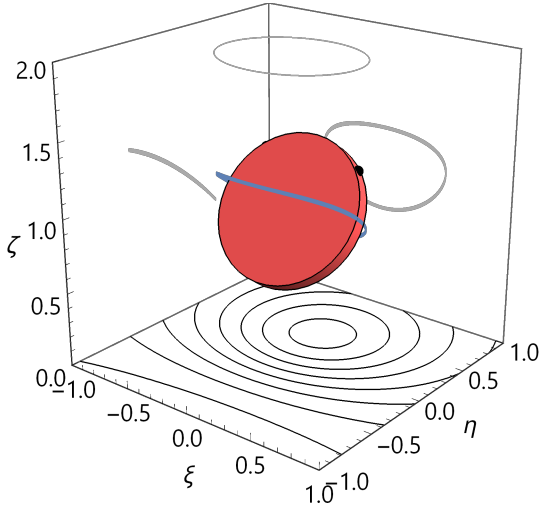




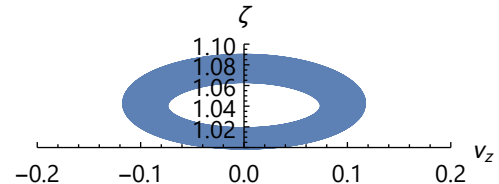
**Figura A.325** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



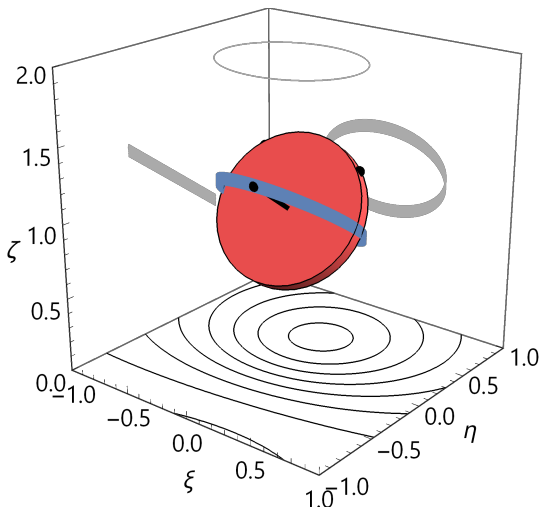
**Figura A.326** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



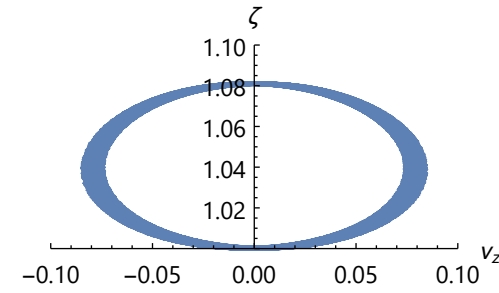
**Figura A.327** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



**Figura A.328** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



**Figura A.329** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



**Figura A.330** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

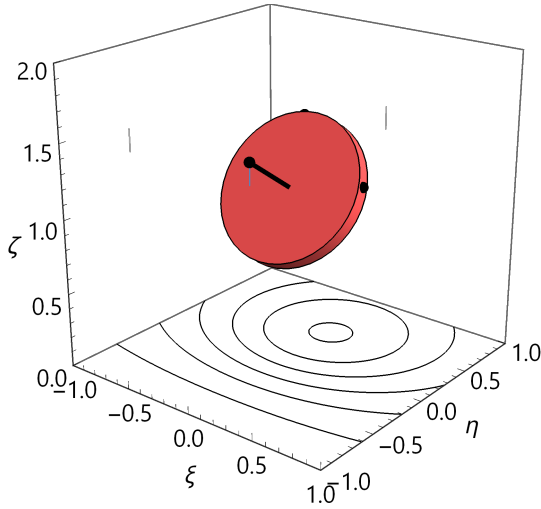


Figura A.331 Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$

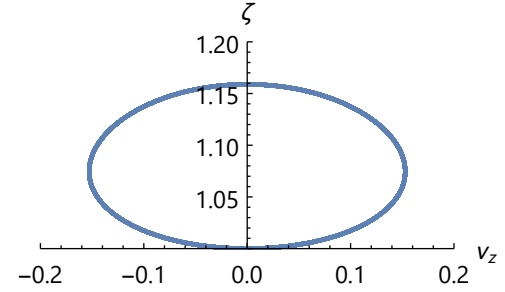


Figura A.332 Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$

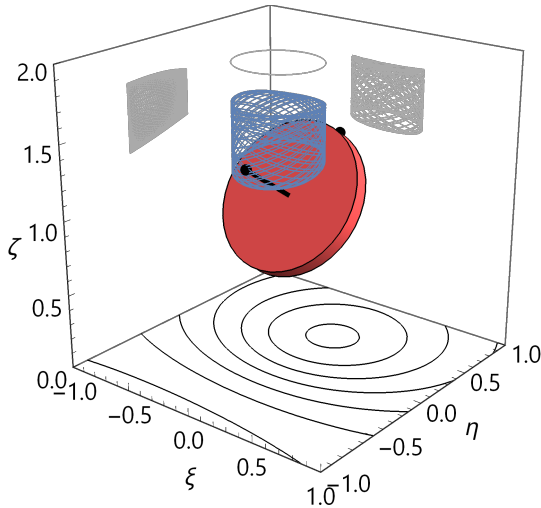


Figura A.333 Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$

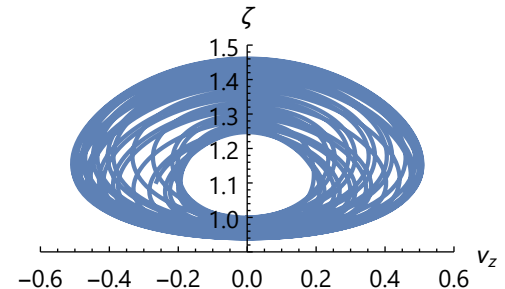


Figura A.334 Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$

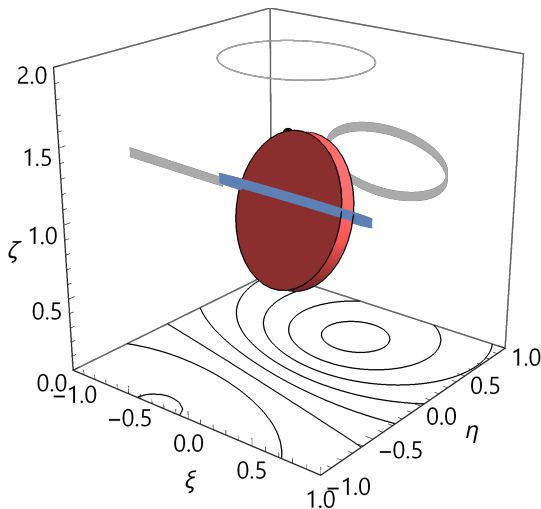


Figura A.335 Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

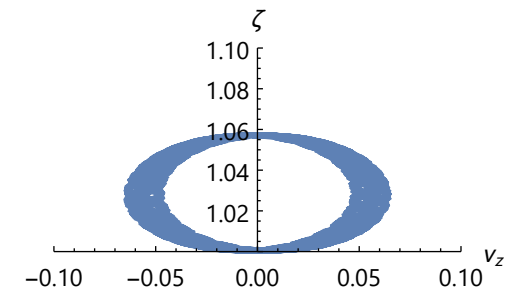
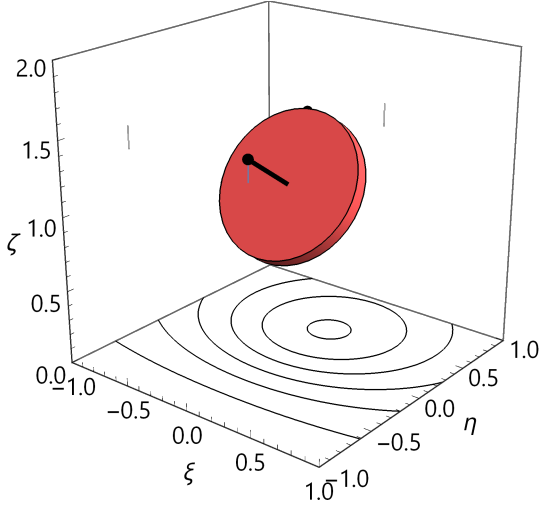
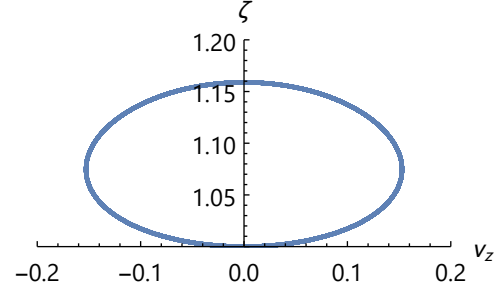


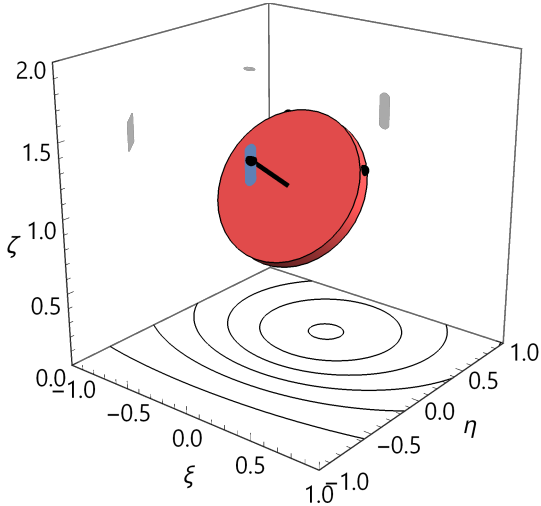
Figura A.336 Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



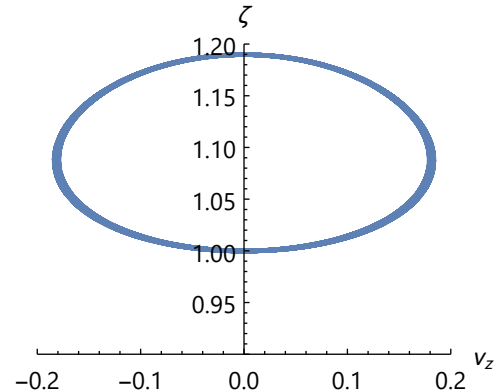
**Figura A.337** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



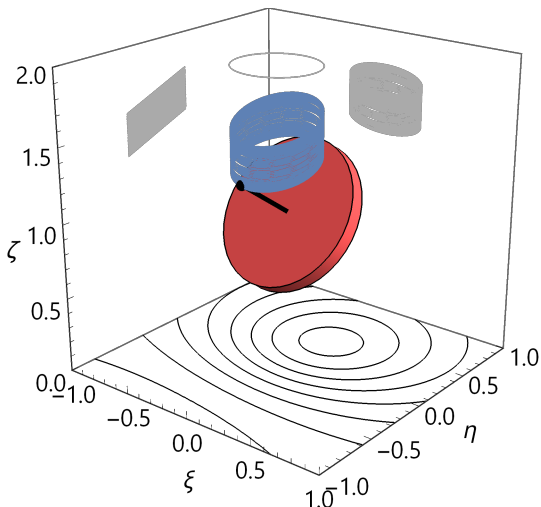
**Figura A.338** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



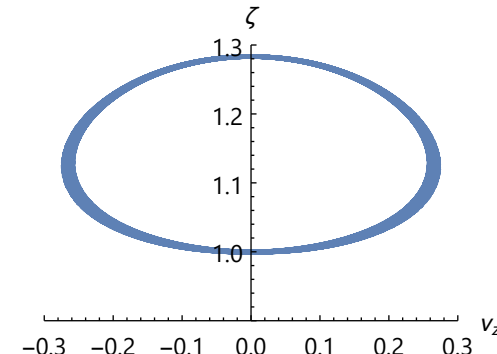
**Figura A.339** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



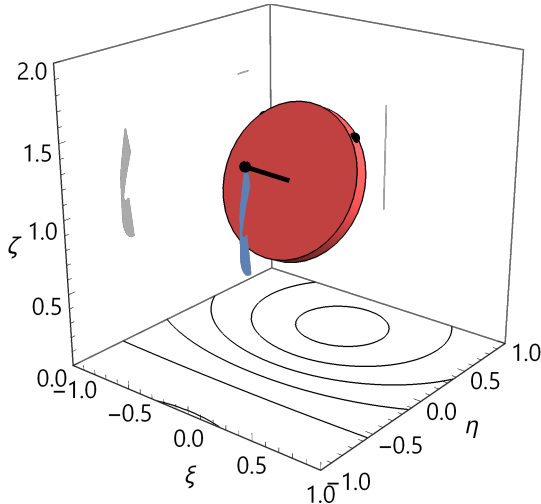
**Figura A.340** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



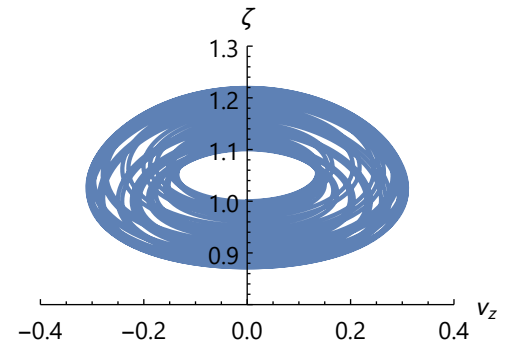
**Figura A.341** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



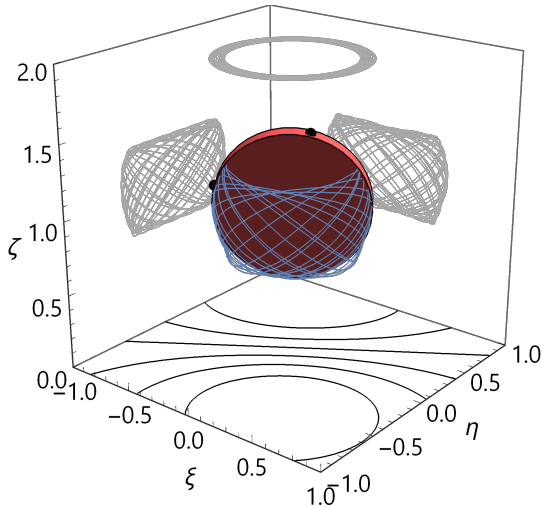
**Figura A.342** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



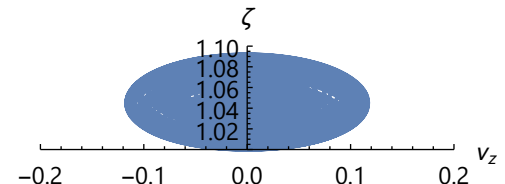
**Figura A.343** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



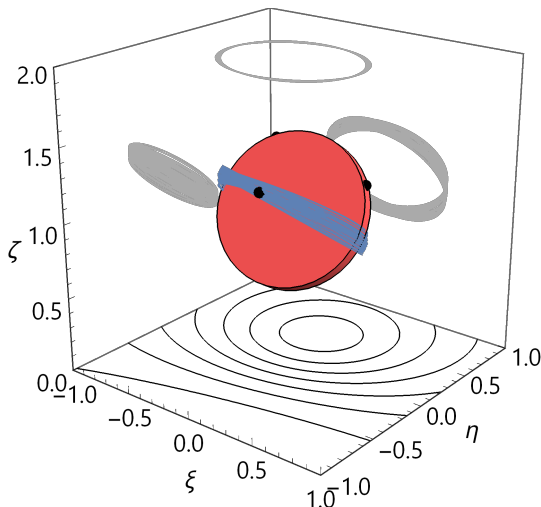
**Figura A.344** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



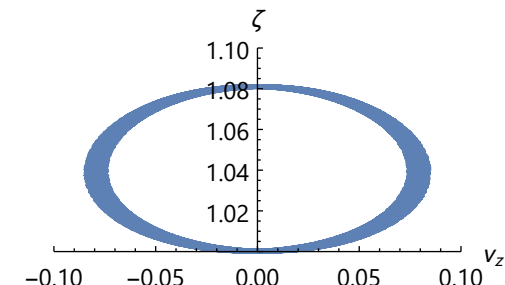
**Figura A.345** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



**Figura A.346** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



**Figura A.347** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



**Figura A.348** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

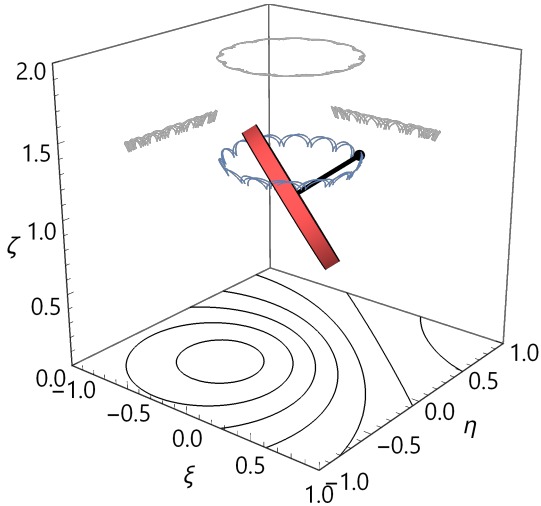


Figura A.349 Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$

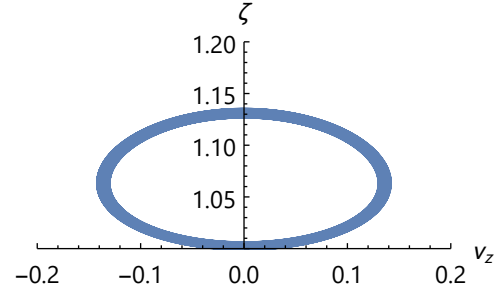


Figura A.350 Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$

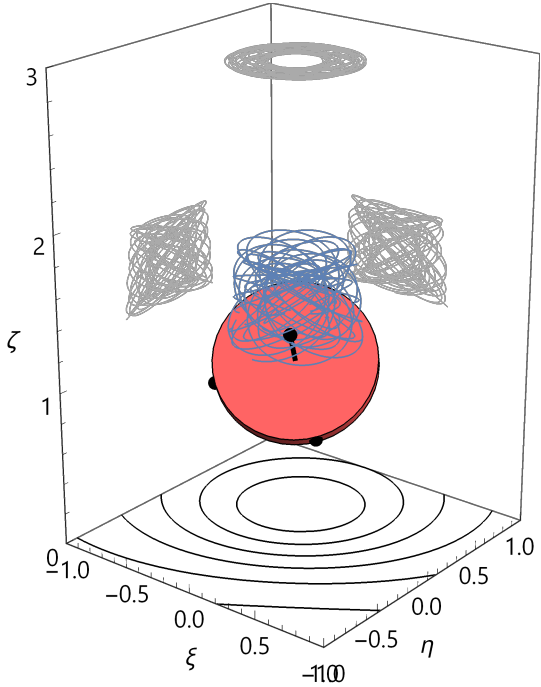


Figura A.351 Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

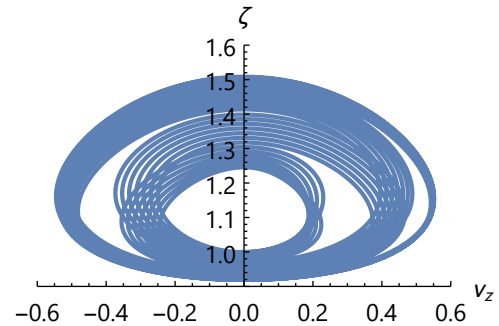


Figura A.352 Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$

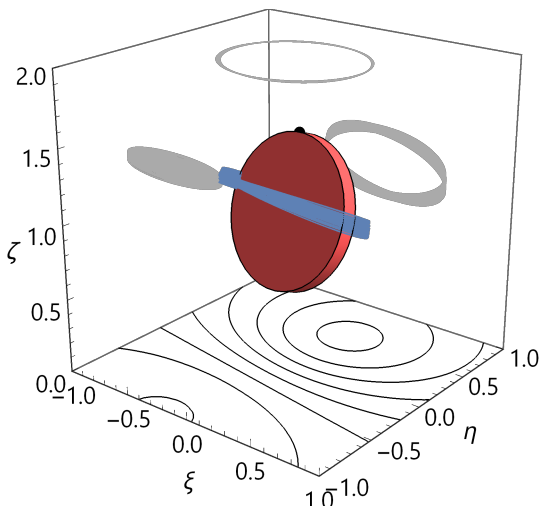


Figura A.353 Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$

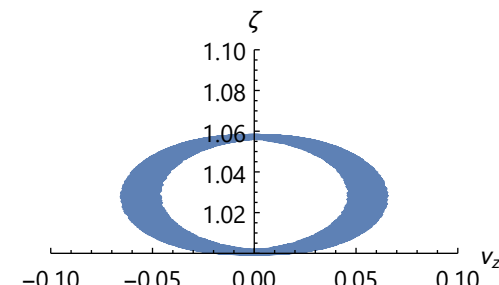
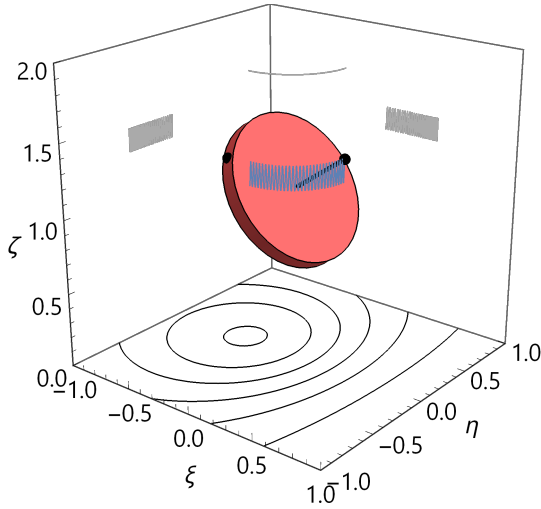
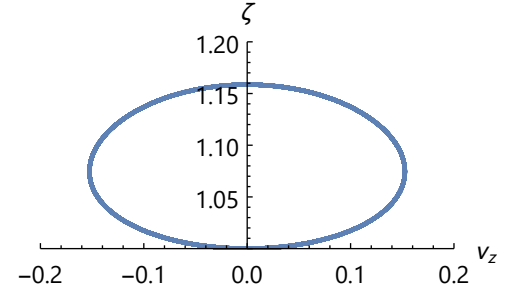


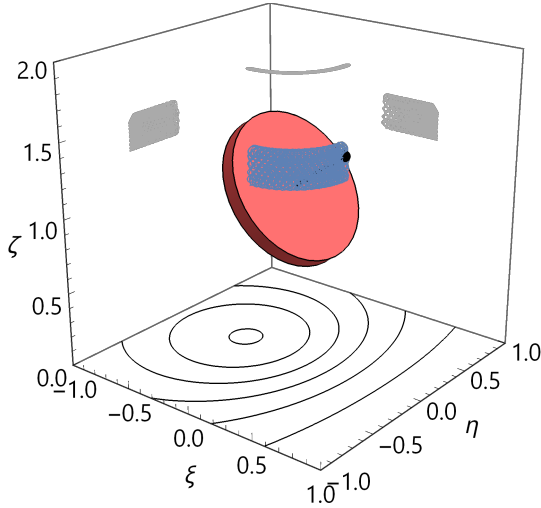
Figura A.354 Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



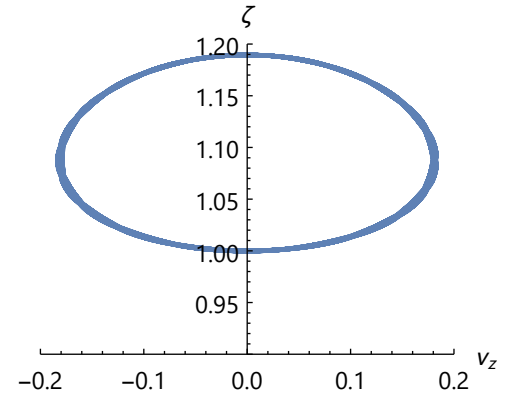
**Figura A.355** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



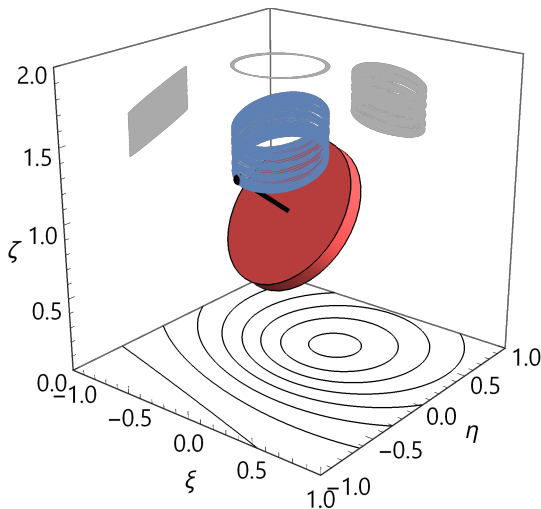
**Figura A.356** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



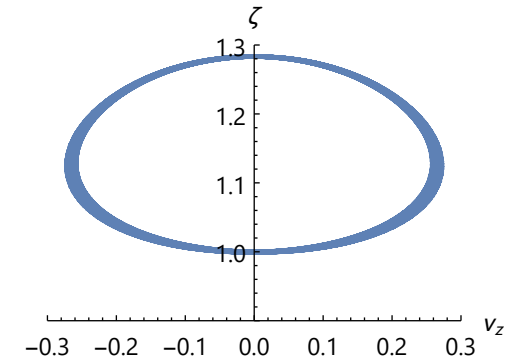
**Figura A.357** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



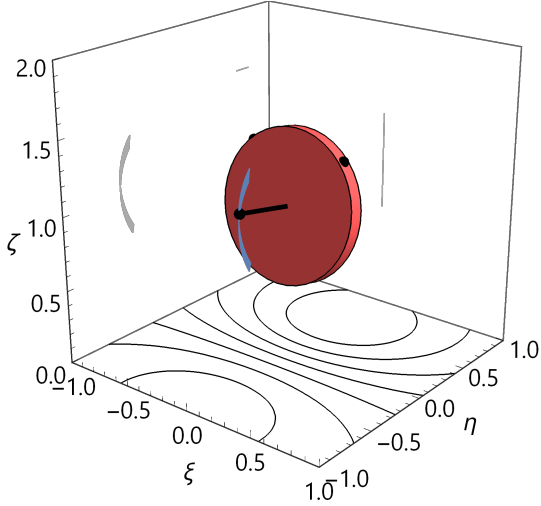
**Figura A.358** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



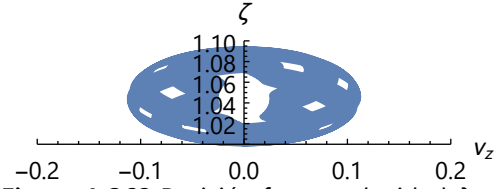
**Figura A.359** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



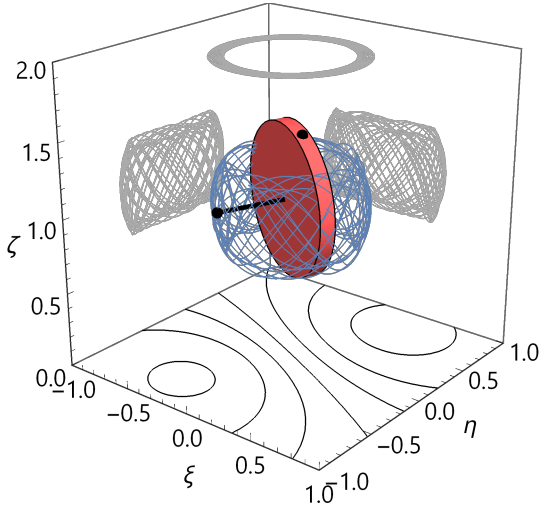
**Figura A.360** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



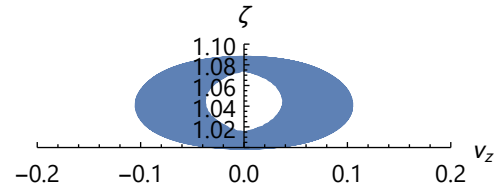
**Figura A.361** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



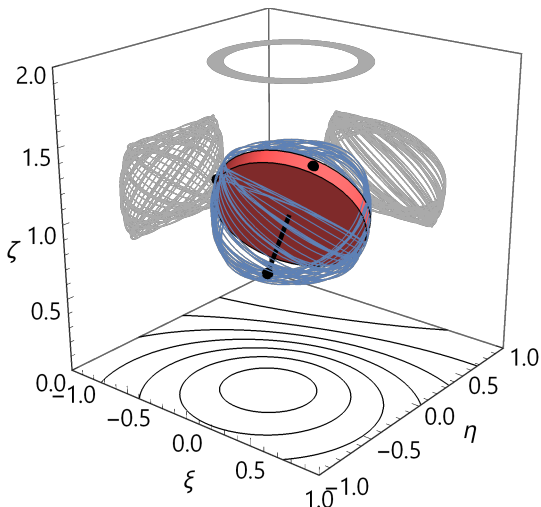
**Figura A.362** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 0$



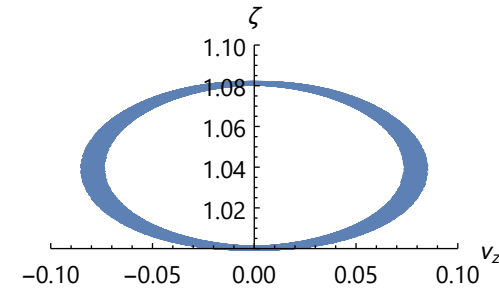
**Figura A.363** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



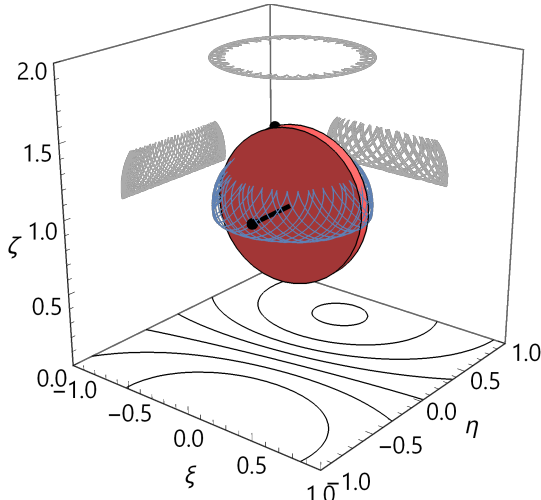
**Figura A.364** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 1$



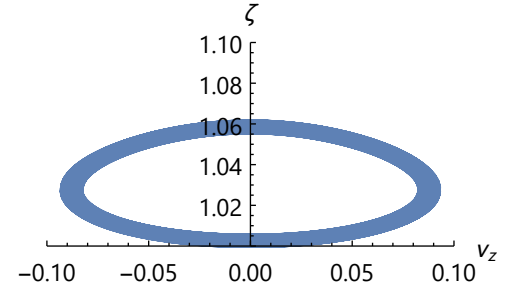
**Figura A.365** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



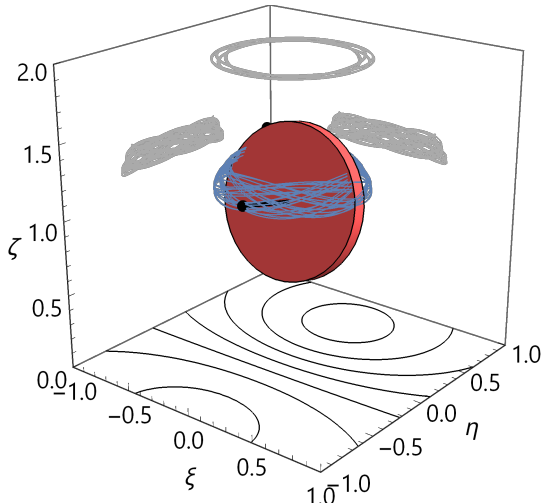
**Figura A.366** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\kappa_{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{X},\bar{Y}}(0) = 10$



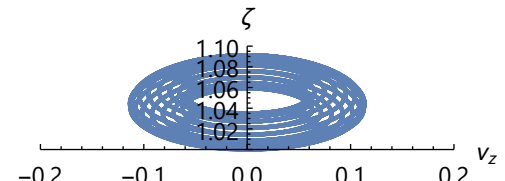
**Figura A.367** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



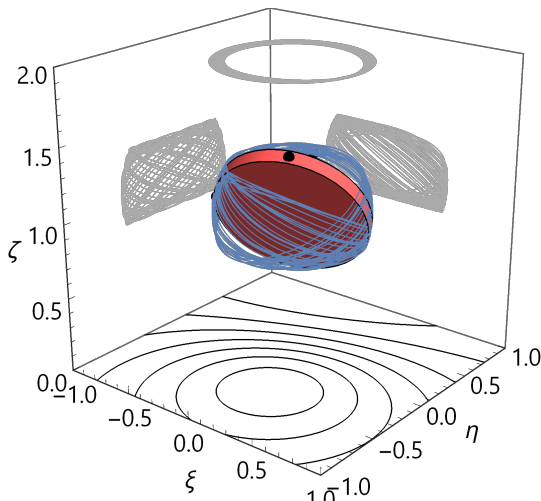
**Figura A.368** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



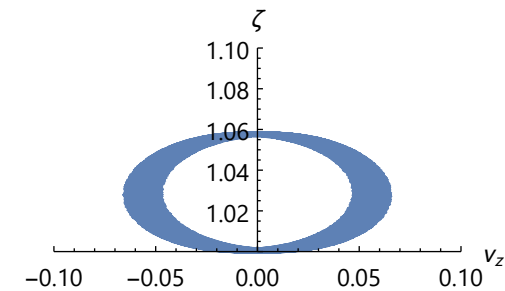
**Figura A.369** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



**Figura A.370** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$

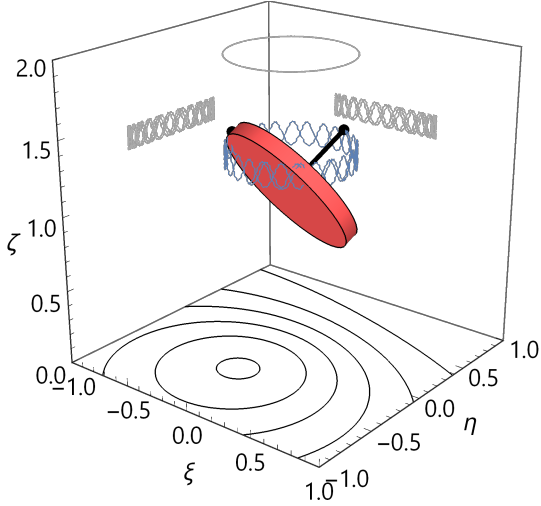


**Figura A.371** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

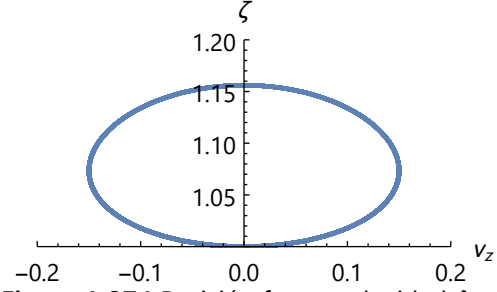


**Figura A.372** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 1$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$

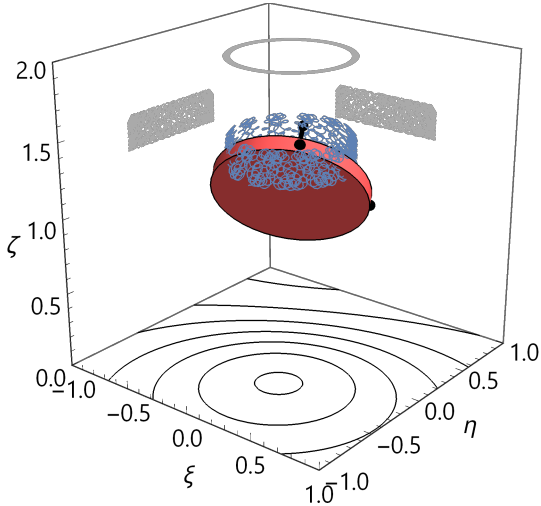




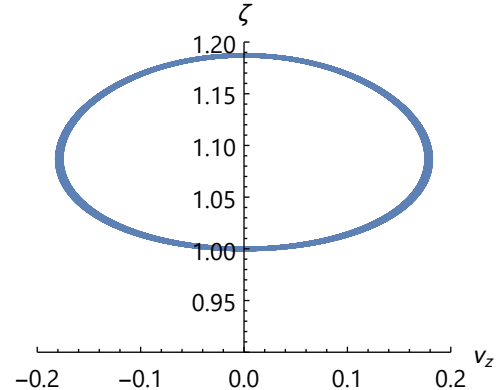
**Figura A.373** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



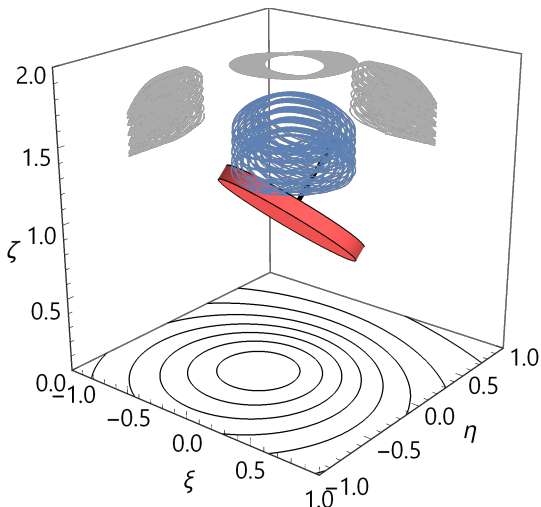
**Figura A.374** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 0$



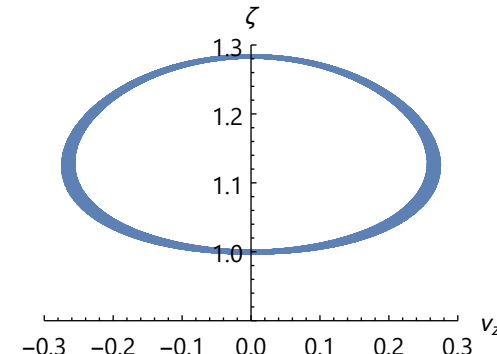
**Figura A.375** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



**Figura A.376** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 1$



**Figura A.377** Trayectoria y líneas de corriente:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



**Figura A.378** Posición frente velocidad:  $\lambda = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\kappa_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(0) = 1/\sqrt{3}$ ,  $\varpi_{\bar{x},\bar{y}}(0) = 10$



# Apéndice B

## Ejemplo de código usado en MATHEMATICA®

### B.1 Código para simulaciones del medio superconductor

**Código B.1** Código para adquirir los resultados de la simulación en el medio superconductor

```
1 (*Valor de parámetros*)
2 l=1; (*Parámetro geométrico: l={0,1,2} *)
3 b=1; (*Parámetro magnético: b={0,1,10}*)
4 w=1; (*Velocidad rotación eje dipolo: w={0,1,10}*)
5
6 (*Ecuaciones adimensionales del movimiento ideal*)
7 eqs={z'[t]==vz[t],
8 vz'[t]==-1+(1+kz[t]^2)/z[t]^4,
9 kx'[t]==ky[t] w-kz[t]wy[t],
10 ky'[t]==kz[t] wx[t]-kx[t]w,
11 kz'[t]==kx[t] wy[t]-ky[t]wx[t],
12 wx'[t]==wy[t] w (1-l)+2b (ky[t] kz[t])/(3 z[t]^3),
13 wy'[t]==wx[t] w (l-1)-2b ( kx[t] kz[t])/(3 z[t]^3),
14 z[0]==1,vz[0]==0,
15 kx[0]==0,ky[0]==0,kz[0]==Sqrt[1-kx[0]^2-ky[0]^2],wx[0]==1,wy[0]==wx[0]};
16
17 (*Solución del sistema*)
18 tsol=1000;
19 sol=NDSolve[eqs,{z[t],vz[t],kx[t],ky[t],kz[t],wx[t],wy[t]},{t,0,tsol}];
20 Z[t_]:=Evaluate[z[t]/.sol][[1]];
21 Vz[t_]:=Evaluate[vz[t]/.sol][[1]];
22 Kx[t_]:=Evaluate[kx[t]/.sol][[1]];
23 Ky[t_]:=Evaluate[ky[t]/.sol][[1]];
24 Kz[t_]:=Evaluate[kz[t]/.sol][[1]];
25 Wx[t_]:=Evaluate[w x[t]/.sol][[1]];
26 Wy[t_]:=Evaluate[w y[t]/.sol][[1]];
27
28 (*Definición vector k4 en base fija según orientación inicial *)
29 If[Kx[0]==0,
30 eqi={ix'[t]==w iy[t]-Wy[t] iz[t],
31 iy'[t]==Wx[t] iz[t]-w ix[t],
32 iz'[t]==Wy[t] ix[t]-Wx[t] iy[t],
33 ix[0]==0,iy[0]==Kz[0]/Sqrt[Kz[0]^2+(-Ky[0])^2],iz[0]==-Ky[0]/Sqrt[Kz[0]^2+(-Ky[0])^2]};
34 eqj={jx'[t]==w jy[t]-Wy[t] jz[t],
35 jy'[t]==Wx[t] jz[t]-w jx[t],
36 jz'[t]==Wy[t] jx[t]-Wx[t] jy[t],
```

```

37 jx[0]==(-Ky[0]^2-Kz[0]^2)/Sqrt[(-Ky[0]^2-Kz[0]^2)^2+(Kx[0]Ky[0])^2+(Kx[0]Kz[0])^2],
38 jy[0]==Kx[0]Ky[0]/Sqrt[(-Ky[0]^2-Kz[0]^2)^2+(Kx[0]Ky[0])^2+(Kx[0]Kz[0])^2],
39 jz[0]==Kx[0]Kz[0]/Sqrt[(-Ky[0]^2-Kz[0]^2)^2+(Kx[0]Ky[0])^2+(Kx[0]Kz[0])^2];
40 ,
41 If[Ky[0]==0,
42 eqi={ix'[t]==w iy[t]-Wy[t] iz[t],
43 iy'[t]==Wx[t] iz[t]-w ix[t],
44 iz'[t]==Wy[t] ix[t]-Wx[t] iy[t],
45 ix[0]==-Kz[0]/Sqrt[(-Kz[0])^2+Kx[0]^2],iy[0]==0,iz[0]==Kx[0]/Sqrt[(-Kz[0])^2+Kx[0]^2]};
46 eqj={jx'[t]==w jy[t]-Wy[t] jz[t],
47 jy'[t]==Wx[t] jz[t]-w jx[t],
48 jz'[t]==Wy[t] jx[t]-Wx[t] jy[t],
49 jx[0]==Kx[0]Ky[0]/Sqrt[(Kx[0]Ky[0])^2+(-Kx[0]^2-Kz[0]^2)^2+(Ky[0]Kz[0])^2],
50 jy[0]==(-Kx[0]^2-Kz[0]^2)/Sqrt[(Kx[0]Ky[0])^2+(-Kx[0]^2-Kz[0]^2)^2+(Ky[0]Kz[0])^2],
51 jz[0]==Ky[0]Kz[0]/Sqrt[(Kx[0]Ky[0])^2+(-Kx[0]^2-Kz[0]^2)^2+(Ky[0]Kz[0])^2]};
52 ,
53 eqi={ix'[t]==w iy[t]-Wy[t] iz[t],
54 iy'[t]==Wx[t] iz[t]-w ix[t],
55 iz'[t]==Wy[t] ix[t]-Wx[t] iy[t],
56 ix[0]==Ky[0]/Sqrt[Ky[0]^2+(-Kx[0])^2],iy[0]==-Kx[0]/Sqrt[Ky[0]^2+(-Kx[0])^2],iz[0]==0};
57 eqj={jx'[t]==w jy[t]-Wy[t] jz[t],
58 jy'[t]==Wx[t] jz[t]-w jx[t],
59 jz'[t]==Wy[t] jx[t]-Wx[t] jy[t],
60 jx[0]==Kx[0]Kz[0]/Sqrt[(Kx[0]Kz[0])^2+(Ky[0]Kz[0])^2+(-Kx[0]^2-Ky[0]^2)^2],
61 jy[0]==Ky[0]Kz[0]/Sqrt[(Kx[0]Kz[0])^2+(Ky[0]Kz[0])^2+(-Kx[0]^2-Ky[0]^2)^2],
62 jz[0]==(-Kx[0]^2-Ky[0]^2)/Sqrt[(Kx[0]Kz[0])^2+(Ky[0]Kz[0])^2+(-Kx[0]^2-Ky[0]^2)^2]};
63 ]
64 ]
65
66 (*Orientación dipolo en base fija *)
67 (*Vector i en base fija *)
68 soli=NDSolve[eqi,{ix[t], iy[t], iz[t]},{t,0,tsol}];
69 lx[t_]:=Evaluate[ix[t]/. soli][[1]];
70 ly[t_]:=Evaluate[iy[t]/. soli][[1]];
71 lz[t_]:=Evaluate[iz[t]/. soli][[1]];
72 (*Vector j en base fija *)
73 solj=NDSolve[eqj,{jx[t], jy[t], jz[t]},{t,0,tsol}];
74 Jx[t_]:=Evaluate[jx[t]/. solj][[1]];
75 Jy[t_]:=Evaluate[jy[t]/. solj][[1]];
76 Jz[t_]:=Evaluate[jz[t]/. solj][[1]];
77
78 (*Vectores unitarios solidarios al sólido referidos a la base fija *)
79 I4[t_]:={lx[t], Jx[t], Kx[t]};
80 J4[t_]:={ly[t], Jy[t], Ky[t]};
81 K4[t_]:={lz[t], Jz[t], Kz[t]};
82
83 (*Momento dipolar magnético y posición de dipolo real*)
84 m[1,t_]:={Iz[t], Jz[t], Kz[t]};
85 R[1,t_]:={0,0,Z[t]};
86
87 (*Momento dipolar magnético y posición de dipolo imagen*)
88 m[2,t_]:={Iz[t], Jz[t], -Kz[t]};
89 R[2,t_]:={0,0,-Z[t]};
90
91 (*Posición en el espacio*)
92 Rs={x,y,z};
93
94 (*Posiciones relativas *)

```

```

95 Do[dR[i,t_]=Rs-R[i,t ],{ i ,2}]
96 Do[dd[i,t_]=Sqrt[dR[i,t ]. dR[i,t ]],{ i ,2}]
97 s[t_]=R[1,t]-R[2,t];
98 d[t_]=Sqrt[s[t ]. s[t ]];
99
100 (*Campo magnético en el espacio*)
101 B[x_,y_,z_,t_]=Simplify[Sum[3(m[i,t ]. dR[i,t ]) dR[i,t ]/dd[i,t ]^5-m[i,t ]/dd[i,t ]^3,{ i ,2}]];
102
103 (*Campo magnético del dipolo imagen sobre el dipolo real*)
104 Bm[t_]=3(m[2,t ].s[t ]) s[t ]/d[t ]^5-m[2,t ]/d[t ]^3;
105
106 (*Densidad superficial de corriente*)
107 Ks[x0_,y0_,t_]=Simplify[Drop[Cross [{0,0,1}, B[x0,y0,0,t ]],-1]];
108 MKs[x0_,y0_,t_]=Sqrt[Simplify[Ks[x0,y0,t ]. Ks[x0,y0,t ]]];
109
110 (*Función corriente*)
111 {Kx[x0_,y0_,t_], Ky[x0_,y0_,t_]}=Ks[x0,y0,t ];
112
113 (*Función corriente sin parametrizar*)
114 f[x0_,t_]=Integrate[Ky[x0,0,t ], x0];
115 K1=f[x0,t]-f[0,t];
116 g[y0_,t_]=Integrate[-Kx[x0,y0,t ], y0];
117 K2=g[y0,t]-g[0,t];
118 K[x0_,y0_,t_]=K1+K2;

```

## B.2 Código para simulaciones del medio óhmico

**Código B.2** Código para adquirir los resultados de la simulación en el medio óhmico

```

1 (*Valor de parámetros*)
2 z0=1; (*Altura inicial : z0={1,2,3} *)
3 a=1; (*Parámetro conductivo: a={0.1,1,10} *)
4
5 (*Ecuaciones adimensionales del movimiento*)
6 eqs={z'[t]==vz[t],
7 vz'[t]==-1-a vz[t]/z[t]^4,
8 z[0]==z0,vz[0]==0};
9
10 (*Solución del sistema*)
11 tsol=1000;
12 sol=NDSolve[eqs,{z[t],vz[t ]},{ t ,0, tsol }];
13 Z[t_]:= Evaluate[z[t ]/. sol [[1]]];
14 Vz[t_]:= Evaluate[vz[t ]/. sol [[1]]];
15
16 (*Momento dipolar magnético, posición de dipolo real y posición en el espacio*)
17 m={0,0,1};
18 R[t_]={0,0, Z[t ]};
19 Rs={x,y,z};
20
21 (*Posición relativa *)
22 dR[t_]=Rs-R[t]
23 dd[t_]=Sqrt[dR[t ]. dR[t ]]
24
25 (*Campo magnético en el espacio*)
26 B[x_,y_,z_,t_]=Simplify[3(m.dR[t ])dR[t ]/dd[t ]^5-m/dd[t ]^3];

```



# Índice de Figuras

---

1.1.	Líneas de campo de un dipolo magnético	17
1.2.	Modelo de dipolo magnético	17
1.3.	Ferromagnetismo	18
1.4.	Freno magnético	18
1.5.	Resistividad frente a temperatura	19
1.6.	Diagrama de Feynman de un par de cooper	20
1.7.	Modelo estándar de partículas	21
1.8.	Superconductores tipo I y II	21
1.9.	Elementos con comportamiento superconductor	22
1.10.	Descubrimiento cronológico de materiales superconductores	23
2.1.	Posición y orientación de un sólido rígido	25
2.2.	Ángulos de Euler	26
2.3.	Rotación del sistema de referencia {1}	27
2.4.	Proyección de la rotación del sistema de referencia {1}	27
2.5.	Rotación del sistema de referencia {2}	28
2.6.	Proyección de la rotación del sistema de referencia {2}	28
2.7.	Rotación del sistema de referencia {3}	30
2.8.	Proyección de la rotación del sistema de referencia {3}	30
2.9.	Ángulos de Tait-Bryan	32
2.10.	Fuerzas y pares sobre un sólido	33
2.11.	Componentes del vector velocidad angular	34
2.12.	Componentes del vector unitario en dirección vertical	36
2.13.	Componentes del vector unitario en dirección del eje de simetría el sólido	39
3.1.	Fuerzas y pares sobre un dipolo	41
3.2.	Dipolo magnético horizontal	43
3.3.	Dipolo magnético vertical	44
3.4.	Dipolo magnético oblicuo	44
3.5.	Relación geométrica entre el momento dipolar magnético del dipolo real e imagen	45
5.1.	Valor de constantes del sistema: Disco inicialmente vertical, intensidad magnética media, rotación eje de dipolo media, rotación inicial otro eje media	60
5.2.	Posición y velocidad: Disco, intensidad magnética baja-alta, rotación eje de dipolo media, rotación inicial otro eje media	61
5.3.	Trayectoria, líneas de corriente y velocidad de rotación: Disco, intensidad magnética baja-alta, rotación eje de dipolo media, rotación inicial otro eje media	63
5.4.	Posición y velocidad: Disco, intensidad magnética media, rotación eje de dipolo baja-alta, rotación inicial otro eje media	64
5.5.	Trayectoria, líneas de corriente y velocidad de rotación: Disco, intensidad magnética media, rotación eje de dipolo baja-alta, rotación inicial otro eje media	66
5.6.	Posición y velocidad: Disco, intensidad magnética media, rotación eje de dipolo media, rotación inicial otro eje baja-alta	67

5.7.	Trayectoria, líneas de corriente y velocidad de rotación: Disco, intensidad magnética media, rotación eje de dipolo media, rotación inicial otro eje baja-alta	69
5.8.	Comparación según geometría: Dipolo inicialmente horizontal, intensidad magnética media, rotación eje de dipolo media, rotación inicial otro eje media	70
5.9.	Comparación según geometría: Dipolo inicialmente vertical, intensidad magnética media, rotación eje de dipolo media, rotación inicial otro eje media	72
5.10.	Comparación según geometría: Dipolo inicialmente oblicuo, intensidad magnética media, rotación eje de dipolo media, rotación inicial otro eje media	74
6.1.	Sistemas de coordenadas	78
6.2.	Posición del dipolo: Parámetro conductivo bajo	83
6.3.	Velocidad del dipolo: Parámetro conductivo bajo	83
6.4.	Posición frente velocidad del dipolo: Parámetro conductivo bajo	83
6.5.	Posición del dipolo: Parámetro conductivo medio	84
6.6.	Velocidad del dipolo: Parámetro conductivo medio	84
6.7.	Posición frente velocidad del dipolo: Parámetro conductivo medio	84
6.8.	Posición del dipolo: Parámetro conductivo alto	85
6.9.	Velocidad del dipolo: Parámetro conductivo alto	85
6.10.	Posición frente velocidad del dipolo: Parámetro conductivo alto	85
6.11.	Posición y velocidad del dipolo: Altura inicial baja	86
6.12.	Posición frente velocidad del dipolo: Altura inicial baja	86
6.13.	Posición y velocidad del dipolo: Altura inicial media	87
6.14.	Posición frente velocidad del dipolo: Altura inicial media	87
6.15.	Posición y velocidad del dipolo: Altura inicial alta	88
6.16.	Posición frente velocidad del dipolo: Altura inicial alta	88
A.1.	Trayectoria y líneas de corriente: Varilla inicialmente <i>horizontal</i> , intensidad magnética <i>baja</i> , rotación eje de dipolo <i>baja/media/alta</i> , rotación inicial otro eje <i>baja</i>	93
A.2.	Posición frente velocidad: Varilla inicialmente <i>horizontal</i> , intensidad magnética <i>baja</i> , rotación eje de dipolo <i>baja/media/alta</i> , rotación inicial otro eje <i>baja</i>	93
A.3.	Trayectoria y líneas de corriente: Varilla inicialmente <i>horizontal</i> , intensidad magnética <i>baja</i> , rotación eje de dipolo <i>baja/media/alta</i> , rotación inicial otro eje <i>media</i>	93
A.4.	Posición frente velocidad: Varilla inicialmente <i>horizontal</i> , intensidad magnética <i>baja</i> , rotación eje de dipolo <i>baja/media/alta</i> , rotación inicial otro eje <i>media</i>	93
A.5.	Trayectoria y líneas de corriente: Varilla inicialmente <i>horizontal</i> , intensidad magnética <i>baja</i> , rotación eje de dipolo <i>baja/media/alta</i> , rotación inicial otro eje <i>alta</i>	93
A.6.	Posición frente velocidad: Varilla inicialmente <i>horizontal</i> , intensidad magnética <i>baja</i> , rotación eje de dipolo <i>baja/media/alta</i> , rotación inicial otro eje <i>alta</i>	93
A.7.	Trayectoria y líneas de corriente: Varilla inicialmente <i>horizontal</i> , intensidad magnética <i>media</i> , rotación eje de dipolo <i>baja/media/alta</i> , rotación inicial otro eje <i>baja</i>	94
A.8.	Posición frente velocidad: Varilla inicialmente <i>horizontal</i> , intensidad magnética <i>media</i> , rotación eje de dipolo <i>baja/media/alta</i> , rotación inicial otro eje <i>baja</i>	94
A.9.	Trayectoria y líneas de corriente: Varilla inicialmente <i>horizontal</i> , intensidad magnética <i>media</i> , rotación eje de dipolo <i>baja/media/alta</i> , rotación inicial otro eje <i>media</i>	94
A.10.	Posición frente velocidad: Varilla inicialmente <i>horizontal</i> , intensidad magnética <i>media</i> , rotación eje de dipolo <i>baja/media/alta</i> , rotación inicial otro eje <i>media</i>	94
A.11.	Trayectoria y líneas de corriente: Varilla inicialmente <i>horizontal</i> , intensidad magnética <i>media</i> , rotación eje de dipolo <i>baja/media/alta</i> , rotación inicial otro eje <i>alta</i>	94
A.12.	Posición frente velocidad: Varilla inicialmente <i>horizontal</i> , intensidad magnética <i>media</i> , rotación eje de dipolo <i>baja/media/alta</i> , rotación inicial otro eje <i>alta</i>	94
A.13.	Trayectoria y líneas de corriente: Varilla inicialmente <i>horizontal</i> , intensidad magnética <i>alta</i> , rotación eje de dipolo <i>baja/media/alta</i> , rotación inicial otro eje <i>baja</i>	95
A.14.	Posición frente velocidad: Varilla inicialmente <i>horizontal</i> , intensidad magnética <i>alta</i> , rotación eje de dipolo <i>baja/media/alta</i> , rotación inicial otro eje <i>baja</i>	95
A.15.	Trayectoria y líneas de corriente: Varilla inicialmente <i>horizontal</i> , intensidad magnética <i>alta</i> , rotación eje de dipolo <i>baja/media/alta</i> , rotación inicial otro eje <i>media</i>	95
A.16.	Posición frente velocidad: Varilla inicialmente <i>horizontal</i> , intensidad magnética <i>alta</i> , rotación eje de dipolo <i>baja/media/alta</i> , rotación inicial otro eje <i>media</i>	95



[illegible]



[illegible]



[illegible]



[illegible]





[illegible]



[illegible]



A.365. Trayectoria y líneas de corriente: Disco inicialmente oblicuo, intensidad magnética <i>alta</i> , rotación eje de dipolo <i>baja</i> , rotación inicial otro eje <i>alta</i>	153
A.366. Posición frente velocidad: Disco inicialmente oblicuo, intensidad magnética <i>alta</i> , rotación eje de dipolo <i>baja</i> , rotación inicial otro eje <i>alta</i>	153
A.367. Trayectoria y líneas de corriente: Disco inicialmente oblicuo, intensidad magnética <i>alta</i> , rotación eje de dipolo <i>media</i> , rotación inicial otro eje <i>baja</i>	154
A.368. Posición frente velocidad: Disco inicialmente oblicuo, intensidad magnética <i>alta</i> , rotación eje de dipolo <i>media</i> , rotación inicial otro eje <i>baja</i>	154
A.369. Trayectoria y líneas de corriente: Disco inicialmente oblicuo, intensidad magnética <i>alta</i> , rotación eje de dipolo <i>media</i> , rotación inicial otro eje <i>media</i>	154
A.370. Posición frente velocidad: Disco inicialmente oblicuo, intensidad magnética <i>alta</i> , rotación eje de dipolo <i>media</i> , rotación inicial otro eje <i>media</i>	154
A.371. Trayectoria y líneas de corriente: Disco inicialmente oblicuo, intensidad magnética <i>alta</i> , rotación eje de dipolo <i>media</i> , rotación inicial otro eje <i>alta</i>	154
A.372. Posición frente velocidad: Disco inicialmente oblicuo, intensidad magnética <i>alta</i> , rotación eje de dipolo <i>media</i> , rotación inicial otro eje <i>alta</i>	154
A.373. Trayectoria y líneas de corriente: Disco inicialmente oblicuo, intensidad magnética <i>alta</i> , rotación eje de dipolo <i>alta</i> , rotación inicial otro eje <i>baja</i>	155
A.374. Posición frente velocidad: Disco inicialmente oblicuo, intensidad magnética <i>alta</i> , rotación eje de dipolo <i>alta</i> , rotación inicial otro eje <i>baja</i>	155
A.375. Trayectoria y líneas de corriente: Disco inicialmente oblicuo, intensidad magnética <i>alta</i> , rotación eje de dipolo <i>alta</i> , rotación inicial otro eje <i>media</i>	155
A.376. Posición frente velocidad: Disco inicialmente oblicuo, intensidad magnética <i>alta</i> , rotación eje de dipolo <i>alta</i> , rotación inicial otro eje <i>media</i>	155
A.377. Trayectoria y líneas de corriente: Disco inicialmente oblicuo, intensidad magnética <i>alta</i> , rotación eje de dipolo <i>alta</i> , rotación inicial otro eje <i>alta</i>	155
A.378. Posición frente velocidad: Disco inicialmente oblicuo, intensidad magnética <i>alta</i> , rotación eje de dipolo <i>alta</i> , rotación inicial otro eje <i>alta</i>	155



# Índice de Tablas

---

5.1.	Valores máximos según geometría: Dipolo inicialmente horizontal, intensidad magnética media, rotación eje de dipolo media, rotación inicial otro eje media	70
5.2.	Variación según geometría: Dipolo inicialmente horizontal, intensidad magnética media, rotación eje de dipolo media, rotación inicial otro eje media	71
5.3.	Valores máximos según geometría: Dipolo inicialmente vertical, intensidad magnética media, rotación eje de dipolo media, rotación inicial otro eje media	72
5.4.	Variación según geometría: Dipolo inicialmente vertical, intensidad magnética media, rotación eje de dipolo media, rotación inicial otro eje media	73
5.5.	Valores máximos según geometría: Dipolo inicialmente oblicuo, intensidad magnética media, rotación eje de dipolo media, rotación inicial otro eje media	74
5.6.	Variación según geometría: Dipolo inicialmente oblicuo, intensidad magnética media, rotación eje de dipolo media, rotación inicial otro eje media	75
6.1.	Valores característicos según altura inicial del dipolo: Parámetro conductivo bajo	83
6.2.	Valores característicos según altura inicial del dipolo: Parámetro conductivo medio	84
6.3.	Valores característicos según altura inicial del dipolo: Parámetro conductivo alto	85
6.4.	Valores característicos según propiedades del plano: Altura inicial baja	86
6.5.	Valores característicos según propiedades del plano: Altura inicial media	87
6.6.	Valores característicos según propiedades del plano: Altura inicial alta	88





# Índice de Códigos

---

B.1.	Código para adquirir los resultados de la simulación en el medio superconductor	157
B.2.	Código para adquirir los resultados de la simulación en el medio óhmico	159



# Bibliografía

---

- [1] Francis C Moon. *Superconducting Levitation: Applications to Bearing and Magnetic Transportation*. John Wiley & Sons, 2008.
- [2] S Palagummi and F-G Yuan. Magnetic levitation and its application for low frequency vibration energy harvesting. In *Structural Health Monitoring (SHM) in Aerospace Structures*, pages 213–251. Elsevier, 2016.
- [3] Samuel Earnshaw. On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 7:97–112, 1842.
- [4] Earnshaw's theorem. <https://www.mit.edu/~kardar/research/seminars/Casimir2010/talks/Dresden/Earnshaw.html>. Último acceso: 22-11-18.
- [5] Paul G Huray. *Maxwell's equations*. John Wiley & Sons, 2011.
- [6] WM Saslow. How a superconductor supports a magnet, how magnetically "soft" iron attracts a magnet, and eddy currents for the uninitiated. *American Journal of Physics*, 59(1):16–25, 1991.
- [7] Tai L Chow. *Introduction to electromagnetic theory: a modern perspective*. Jones & Bartlett Learning, 2006.
- [8] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. AAPT, 1999.
- [9] Marcelo Rodríguez Danta, Antonio González Fernández, and Consuelo Bellver Cebreros. *Campos electromagnéticos*, volume 32. Universidad de Sevilla, 1999.
- [10] Dipolo magnético. [http://laplace.us.es/wiki/index.php/Dipolo\\_magn%C3%A9tico](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Dipolo_magn%C3%A9tico). Último acceso: 22-11-18.
- [11] Marcelo Rodríguez Danta. *Mecánica*. Universidad de Sevilla. Secretariado de Publicaciones, 2010.
- [12] Soshin Chikazumi and Chad D Graham. *Physics of Ferromagnetism 2e*, volume 94. Oxford University Press on Demand, 2009.
- [13] Ferromagnetism. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Solids/ferro.html#c1>. Último acceso: 22-11-18.
- [14] Israel D Vagner, Boris I Lemberikov, and Peter Rudolf Wyder. *Electrodynamics of magnetoactive media*, volume 135. Springer Science & Business Media, 2013.
- [15] WR Smythe. On eddy currents in a rotating disk. *Electrical Engineering*, 61(9):681–684, 1942.
- [16] Orthwein C William. *Clutches and brakes: Design and Selection*. CRC Press, 2004.
- [17] Manuela Martin. Cien años de superconductividad. *Revista Española de Física*, 0213-862X, REF:54–60, 10 2011.
- [18] Isotope effect. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Solids/coop.html#c5>. Último acceso: 22-11-18.
- [19] Martin Wilson. *Case studies in superconducting magnets: Yukikazu Iwasa*. Elsevier, 1996.

- [20] The meissner effect. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Solids/meis.html>. Último acceso: 22-11-18.
- [21] Emanuel Maxwell. Isotope effect in the superconductivity of mercury. *Physical Review*, 78(4):477, 1950.
- [22] Standard model. <https://home.cern/science/physics/standard-model>. Último acceso: 22-11-18.
- [23] Richard P Feynman, Robert B Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman lectures on physics, Vol. I: The new millennium edition: mainly mechanics, radiation, and heat*, volume 1. Basic books, 2011.
- [24] James F Annett. *Superconductivity, superfluids and condensates*, volume 5. Oxford University Press, 2004.
- [25] David J Griffiths and Darrell F Schroeter. *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2018.
- [26] KB Ma, YV Postrekhin, and WK Chu. Superconductor and magnet levitation devices. *Review of Scientific Instruments*, 74(12):4989–5017, 2003.
- [27] Type i superconductors. <http://www.superconductors.org/Type1.htm>. Último acceso: 22-11-18.
- [28] Type ii superconductors. <http://www.superconductors.org/Type2.htm>. Último acceso: 22-11-18.
- [29] P Grima-Gallardo, M Palmera, M Muñoz, S Durán, M Quintero, E Quintero, L Nieves, E Moreno, MA Ramos, and H Romero. Superconductivity observation in an alloy.
- [30] Natalia V Morozova, Vladimir V Shchennikov, and Sergey V Ovsyannikov. Features and regularities in behavior of thermoelectric properties of rare-earth, transition, and other metals under high pressure up to 20 gpa. *Journal of Applied Physics*, 118(22):225901, 2015.
- [31] Superconductivity. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Solids/scond.html#c4>. Último acceso: 22-11-18.
- [32] BD Josephson. Bd josephson, phys. lett. 1, 251 (1962). *Phys. Lett.*, 1:251, 1962.
- [33] Guo-meng Zhao. The resistive transition and meissner effect in carbon nanotubes: Evidence for quasi-one-dimensional superconductivity above room temperature. *arXiv preprint cond-mat/0412382*, 2004.
- [34] T Scheike, W Böhlmann, P Esquinazi, J Barzola-Quiquia, A Ballestar, and A Setzer. Can doping graphite trigger room temperature superconductivity? evidence for granular high-temperature superconductivity in water-treated graphite powder. *Advanced Materials*, 24(43):5826–5831, 2012.
- [35] Room temperature superconductors. [http://www.superconductors.org/28c\\_rtsc.htm](http://www.superconductors.org/28c_rtsc.htm). Último acceso: 22-11-18.
- [36] Scmaglev record. <https://www.theguardian.com/world/2015/apr/21/japans-maglev-train-notches-up-new-world-speed-record-in-test-run/>. Último acceso: 22-11-18.
- [37] Scmaglev. <https://www.scmaglev.com/>. Último acceso: 22-11-18.
- [38] JL He, DM Rote, and HT Coffey. Study of japanese electrodynamic-suspension maglev systems. Technical report, Argonne National Lab., IL (United States). Energy Systems Div., 1994.
- [39] Ángulos de euler y de navegación. [http://laplace.us.es/wiki/index.php/%C3%81ngulos\\_de\\_Euler\\_y\\_de\\_navegaci%C3%B3n](http://laplace.us.es/wiki/index.php/%C3%81ngulos_de_Euler_y_de_navegaci%C3%B3n). Último acceso: 22-11-18.
- [40] V Sosa. Levitation forces between a finite rectangular superconductor and a spherical magnet. *Revista Mexicana de Física*, 63(6), 2017.
- [41] WM Saslow. Maxwell's theory of eddy currents in thin conducting sheets, and applications to electromagnetic shielding and maglev. *American journal of physics*, 60(8):693–711, 1992.